

## **Strukturanalys av brokonstruktioner med finita elementmetoden –**

Fördelning av krafter och moment

Marcus Davidson

Brosamverkan Väst  
Göteborg 2003

## Förord

Inom Brosamverkan Väst har det bildats en arbetsgrupp med avsikt att ta fram förslag till hur linjärelastiska analyser av brokonstruktioner med finita elementmetoden (FEM) bör utföras samt hanteras ur granskningssynpunkt. Särskilda problemområden såsom fördelning av krafter och moment och redovisning av in- och utdata har ägnats särskilt intresse.

Arbetsgruppen, som har initierats av Anders Huvstig, Vägverket Region Väst, består, förutom av honom, av tekn. dr Christina Claesson-Jonsson, NCC AB, Thomas Darholm, FB Engineering AB, Marcus Davidson, Skanska Teknik AB, tekn. dr Morgan Johansson, Reinertsen AB, Jan Olofsson, Skanska Teknik AB och tekn. dr Mario Plos, Chalmers tekniska högskola. Rapporten har finansierats av Vägverket Region Väst som verksamhetsnära utveckling och arbetet med att ta fram rapporten har utförts av Skanska Teknik AB. Kapitel 3.1 har skrivits av professor Björn Engström, Chalmers tekniska högskola.

Särskilt tack riktas till professor Björn Engström för värdefulla synpunkter och tekn. dr Per Kettil, Chalmers tekniska högskola och Skanska Teknik AB, för värdefulla diskussioner.

Göteborg i februari 2003

Marcus Davidson

## Innehållsförteckning

<b>Förord</b> .....	<b>I</b>
<b>Innehållsförteckning</b> .....	<b>II</b>
<b>1 Inledning</b> .....	<b>1</b>
1.1 Bakgrund .....	1
1.2 Mål och omfattning .....	1
<b>2 Finita elementmetoden (FEM)</b> .....	<b>3</b>
2.1 Allmänt .....	3
2.2 Noggrannhet och begränsningar hos FEM.....	4
2.3 Analys av fritt upplagd platta.....	6
<b>3 Beräkning av krafter och moment i betongkonstruktioner</b> .....	<b>10</b>
3.1 Armerade betongkonstruktioners verkningsätt.....	10
3.2 Beräkningsmodeller .....	11
3.3 Dimensionerande tvärkraft .....	13
3.4 Fördelning av krafter och moment enligt svenska handböcker .....	15
3.4.1 Fördelning av moment i tvärled .....	16
3.4.2 Fördelning av tvärkraft i tvärled.....	20
<b>4 Strukturanalys av brokonstruktioner med FEM</b> .....	<b>25</b>
4.1 Linjär FE-analys av plattbro i armerad betong.....	26
4.2 Redovisning av FE-analyser .....	35
<b>5 Diskussion och slutsatser</b> .....	<b>37</b>
5.1 Sammanfattning.....	37
5.2 Förslag till framtida forskning.....	39
<b>6 Referenser</b> .....	<b>40</b>

# 1 Inledning

## 1.1 Bakgrund

På senare tid har tredimensionella (3D) linjärelastiska finita elementanalyser (FE-analyser) börjat användas allt mer vid strukturanalys av brokonstruktioner. Med 3D FE-analyser avses i detta fall huvudsakligen analyser med användande av skalelement, eventuellt i kombination med balkelement. I andra branscher har dock 3D FE-analyser med skal- och volymelement använts sedan flera decennier tillbaka med stor framgång.

Vid 3D FE-analyser av brokonstruktioner med skalelement har särskilda problemställningar dykt upp såsom tolkning av lokala spänningskoncentrationer (fördelning av krafter och moment) samt presentation av in- och utdata. Lokala spänningskoncentrationer uppkommer framför allt vid linjärelastiska FE-analyser av t.ex. betongkonstruktioner. Dessa spänningskoncentrationer är endast beräkningsmässiga och uppstår inte i den verkliga konstruktionen. Spänningskoncentrationerna leder istället till uppsprickning av betongen och omlagringar av spänningarna, vilka i konstruktionen får en mycket mer gynnsam fördelning än i analysen.

Existerande handböcker och teknisk beskrivning för broar, Bro 2002 [1] bygger på att strukturanalysen utförs med någon typ av ramprogram. Relativt klara riktlinjer finns i Bro 2002 [1] för hur in- och utdata från dessa program skall redovisas.

Användandet av 3D FE-analyser vid projektering av brokonstruktioner hämmas till stor del av att konsulterna och granskande myndigheter upplever att inga klara riktlinjer finns hur dessa skall redovisas och hur spänningskoncentrationer skall fördelas. En 3D FE-analys ger dock en mer detaljerad och geometriskt mer korrekt bild av fördelningen av krafter och moment i konstruktionen jämfört med traditionella 2D ramanalyser. En, som man kan uppleva det, nackdel är dock att effekter som döljs i en enklare 2D analys dyker upp, framför allt i den ”tredje dimensionen”, d.v.s. i brons tvärled. För att kunna dra nytta av den noggrannare analysen krävs kunskaper, utvärderingsverktyg och rekommendationer, som till viss del inte existerar idag.

På initiativ av Brosamverkan Väst har därför denna rapport tagits fram, för att belysa särskilda problemställningar i samband med strukturanalys med FEM.

## 1.2 Mål och omfattning

Målet med rapporten som arbetsgruppen inom Brosamverkan Väst tagit fram är att:

- Påvisa skillnader i resultat vid olika sätt att modellera hjullaster och olika val av finita elementnät
- Redogöra för rekommendationer i dagens handböcker och ge eventuella förslag på fördelning av krafter och moment i betongkonstruktioner

- Göra jämförelser mellan resultat från 3D FE-analyser och resultat från förenklade analyser av betongkonstruktioner
- Ge förslag och rekommendationer på hur redovisning av in- och utdata kan ske från ett generellt FE-program
- Ge förslag på områden där fortsatt forskning inom detta område behövs

Rapporten har begränsats till att omfatta linjärelastiska FE-analyser av betongkonstruktioner. Fullständigt olinjära analyser används i dagsläget endast i vissa fall vid klassningsberäkning av broar.

I kapitel 2 ges en kort introduktion till FEM och vilka begränsningar en linjärelastisk FE-analys innebär. I kapitel 3 ges en beskrivning av beräkning av krafter och moment i betongkonstruktioner. Skillnader mellan traditionella 2D ramanalyser och 3D FE-analyser (3D skal- och volymmodeller) och förslag till redovisning av generella FE-analyser presenteras i kapitel 4.

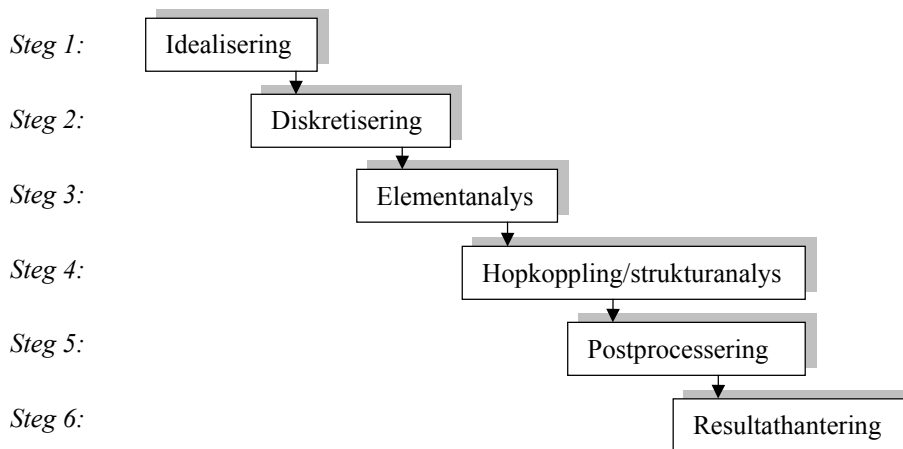
## 2 Finita elementmetoden (FEM)

I kapitel 2.1 beskrivs kort principerna för analys med finita elementmetoden (FEM) och i kapitel 2.2 beskrivs noggrannhet och begränsningar i samband med analys med FEM.

### 2.1 Allmänt

Finita elementmetoden (FEM) är en numerisk metod som kan användas till att lösa i stort sett alla fysikaliska problem. Fördelen med FEM är att den möjliggör en systematisk och noggrann beräkning av alla typer av konstruktioner. Beskrivningen av FEM nedan bygger i huvudsak på Samuelsson och Wiberg [2].

Tillvägagångssättet sker principiellt i följande steg:



Figur 2.1 Tillvägagångssätt vid analys med FEM enligt [2].

I steg 1 görs ett val av beräkningsmodell, d.v.s. hur den verkliga strukturen förenklas med avseende på geometri, randvillkor, laster etc. Man gör antaganden om materialvärden och man antar ofta att materialet beter sig linjärelastiskt.

Steg 2 innebär uppdelning av den idealiserade strukturen i ändliga element (finita element). I steg 3 görs en elementapproximation och elementens styvhets samband beräknas. Beräkning av strukturstyvhetsmatrisen genom hopkoppling av de enskilda elementens styvhetsmatriser och införande av jämviktsvillkor och geometriska villkor utförs i steg 4. Därefter utförs lösning av ekvationssystemet för hela strukturen.

I steg 5 beräknas spänningar och övriga resultatkomponenter i varje enskilt element i strukturen. Spänningarna beräknas i särskilda integrationspunkter. Dessa punkter ligger vanligtvis inte i elementens noder, utan är belägna en bit in i elementen och benämns ofta Gausspunkter efter sättet att utföra integrationen på. Andra typer av integrationsmetoder förekommer, men Gaussintegration är den vanligaste, eftersom den ger störst noggrannhet för ett visst givet antal integrationspunkter.

De olika elementen som används kan något förenklat delas upp i två olika kategorier – strukturelement och kontinuumelement – se Tabell 2.1. Inom elementen används olika polynom (basfunktioner) för att approximativt beräkna den sökta obekanta variabeln.

Tabell 2.1 Indelning av finita elementtyper.

Dimension	Strukturelement	Kontinuumelement
1D	Stångelement	Stångelement
2D	2D balk-, skiv-, platt och övergångselement	Plant spännings- och töjningsselement samt axelsymmetriska element
3D	3D balk-, skal-, och övergångselement	Volymelement

I det sista steget utförs kontroll samt värdering och tolkning av resultatet med hänsyn till strukturens verkliga beteende.

FEM är således en approximativ numerisk metod att beräkna de efterfrågade resultatkomponenterna. Även ramanalys med uppdelning i ändliga balkelement är en finit elementmetod. Noggrannheten och eventuella begränsningar i de olika stegen beskrivs i det följande kapitlet 2.2.

## 2.2 Noggrannhet och begränsningar hos FEM

I varje steg i en FE-analys, liksom i alla andra typer av beräkningar, kan det uppstå fel, som gör att den erhållna lösningen avviker från den korrekta lösningen. Följer vi uppdelningen i olika steg enligt kapitel 2.1 kan noggrannheten och begränsningarna hos FEM beskrivas enligt följande.

### Steg 1:

Vid idealisering av den verkliga strukturen till t.ex. 2D och 3D rammodeller samt 3D skalmodeller görs en förenkling av verkligheten. Materialet antas ofta bete sig linjärelastiskt. I verkliga betongkonstruktioner beter sig dock materialet i högsta grad olinjärt på grund av uppsprickning, olinjär respons i tryck och plasticering av armering, se vidare kapitel 3.1. Randvillkor (frihetsgrader) förenklas ofta till att vara helt fria alternativt helt låsta. Valet av beräkningsmodell har en avgörande inverkan på resultatet, eftersom olika modeller har olika förmåga att beskriva den verkliga strukturens verkningsätt.

Två kända teorier för att analysera linjärelastiska plattor är Kirchhoff-Germains (Kirchhoff-Loves) och Reissner-Mindlins platteorier. Båda teorierna kan sägas vara giltiga för måttligt tunna plattor, där nedböjningarna uppgår till mindre än halva plattjockleken. Å andra sidan gäller inte platteorin för plattjocklekar större än omkring 1/10 av spännvidden för Kirchhoff-Germains respektive 1/5 för Reissner-Mindlins platteori, se [2]. Den senare modellen beaktar även skjuvdeformationer och randvillkor på ett bättre sätt.

I den verkliga strukturen finns så kallade diskontinuitetszoner på grund av geometriska och statiska diskontinuiteter vid hål, upplag och koncentrerade laster, där balk- och platteorin inte är giltig. Diskontinuitetszonen har en utsträckning som uppgår till omkring en tvärsnittshöjd ut från upplaget eller lasten. Enligt platteorin utgör en punkt under en koncentrerad last en singular punkt, i vilken värdet på tvärkraften går mot oändligheten. På motsvarande sätt gäller detta även för moment och tvärkraft vid en pelares anslutning till en platta eller vid ett koncentrerat upplag.

#### *Steg 2:*

Resultatet som erhålls i en punkt (nod) påverkas i hög utsträckning av valt elementnät, typ av element, hur lasten är applicerad etc. Elementnätets kvalitet styrs av storleken på elementen, typ av element och hur förvrängda dessa är. Fler element och element som är så lite förvrängda som möjligt ger ett mer korrekt resultat.

För ett oförändrat elementnät kan en övergång till en annan elementtyp medföra en förbättring. Element av högre ordning (högre ordning på basfunktionerna) ger i allmänhet ett mer korrekt resultat. Det har dock observerats av författaren att kvadratiska skal- eller plattelement kan ge kraftiga variationer av tvärkraften i närheten av punktlaster och punktupplag. Enklare element av lägre ordning kan därför med fördel användas, om elementnätet görs tätare.

Diskontinuitetszoner kan inte modelleras med element som bygger på balk- eller platteorin, se diskussion ovan. Användaren kan istället överväga att byta till en annan analysmetod som t.ex. en fackverksmodell, se kapitel 3.3, eller att modellera området lokalt med plana spännings- eller tøjningselement eller volymelement, om en mer korrekt analys efterfrågas. Förslag på hur dessa diskontinuitetszoner kan modelleras med volymelement i en FE-analys ges av Stein et. al. [3] och Kettil [4].

#### *Steg 3:*

De ingående elementsstyhetsmatriserna i elementanalysen approximeras med hjälp av basfunktioner (linjära, kvadratiska etc.). Elementanalysen kan därefter utföras antingen med exakt eller numerisk integration. I en FE-analys används oftast numerisk integration och för att integrera elementstyhetsmatriserna på ett tillförlitligt sätt erfordras ett visst antal integrationspunkter inom elementen. Denna integration är i allmänhet approximativ även om tillräckligt många integrationspunkter har använts, eftersom integration av rationella funktioner inte blir exakt.

Vid så kallad reducerad integration används färre integrationspunkter än vad som krävs för ett tillförlitligt resultat. Med reducerad integration kan det vara möjligt att kompensera för att strukturen i FE-analysen ofta beter sig styvare än den verkliga strukturen. Reducerad integration kan dock i vissa fall leda till att strukturstyhetsmatrisen blir singular.

#### *Steg 4:*

Datorn kan bara hantera ett visst antal signifikanta siffror. Därför kan det uppstå avrundningsfel vid beräkning av strukturstyhetsmatrisen, om den är illa konditionerad.



### Steg 5:

Värdena som erhålls i integrationspunkterna utgör de mest exakta resultaten från en FE-analys. Resultaten brukar dock för det mesta redovisas i elementens noder. För att kunna göra detta är det nödvändigt att extrapolera resultaten i integrationspunkterna till noderna med hjälp av elementens basfunktioner. Normalt medför ett element av högre ordning en bättre approximation för en linjärelastisk analys än ett element av lägre ordning.

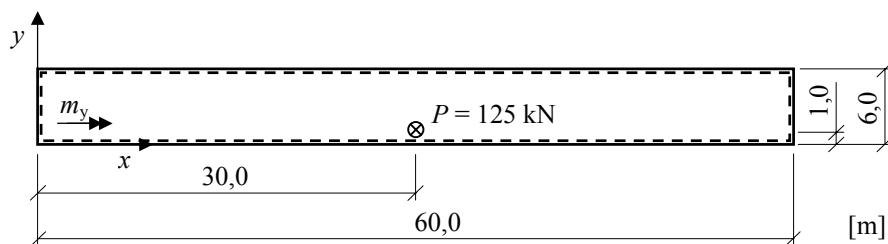
Varje nod är i allmänhet kopplad till mer än ett element. Värdet i respektive nod utgör ett medelvärde, d.v.s. alla element som har en gemensam nod påverkar värdet i just den noden. I engelskspråkiga FE-program betecknas ofta de medelvärdesbildade resultaten från en 3D skal- eller volymmodell som "smoothed results" eller "averaged results". Detta medför att resultatet varierar beroende på vilka delar av strukturen som för tillfället är aktiva. Delar som inte är aktiva bidrar inte till medelvärdesbildningen. Resultat som *inte* är medelvärdesbildade benämns ofta "unsmoothed results" eller "unaveraged results". Med ledning av dessa ej medelvärdesbildade resultat kan användaren bedöma om elementnätet är tillräckligt bra eller om den valda typen av element kan beskriva spänningsfördelningen i strukturen på ett tillfredsställande sätt. I det fall resultaten för de olika redovisningssätten visar på god överensstämmelse sinsemellan, har lösningen konvergerat och resultatet kan anses vara tillräckligt exakt för den valda beräkningsmodellen. För vidare information hänvisas till teorimanualen för respektive FE-program.

### Steg 6:

Resultatet från en linjärelastisk analys måste tolkas, för att kunna användas till dimensionering i brottgränstillstånd. Denna tolkning innehåller ett stort mått av osäkerhet, eftersom den skall ta hänsyn till strukturens verkliga beteende. Det verkliga beteendet kan skilja sig väsentligt från den valda beräkningsmodellens beteende på grund av modellering av upplag, materialets olinjära respons etc., se beskrivning av noggrannheter och begränsningar i steg 1 ovan.

## 2.3 Analys av fritt upplagd platta

Låt oss studera en fritt upplagd platta med spännvidden 6,0 m och belastad med en punktlast (hjultryck) som exempel, se Figur 2.2.

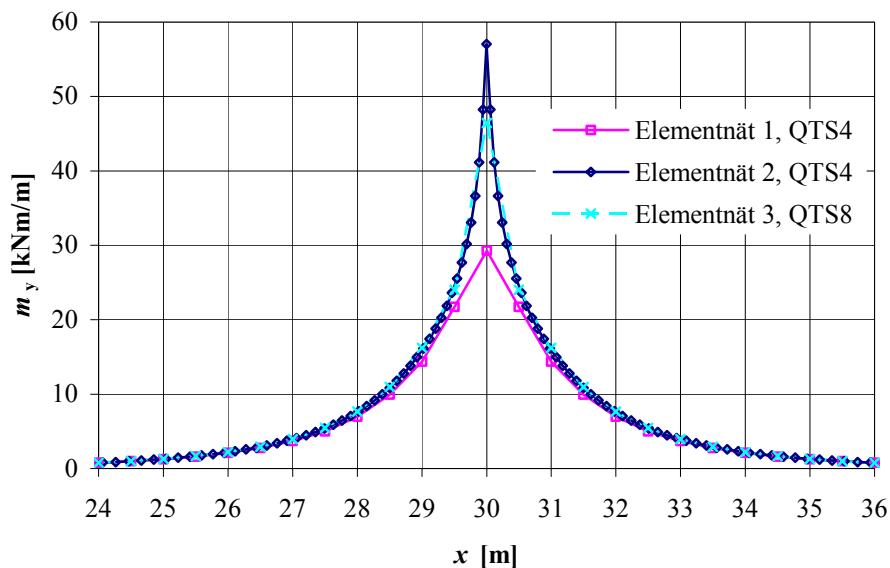


Figur 2.2 Fritt upplagd platta belastad med en punktlast.

Plattans tvärsnittshöjd antas uppgå till 0,5 m, vilket ger ett förhållande mellan höjd och spännvidd på 1:12 i lastbärningsriktningen. Elasticitetsmodulen och tvärkontraktionstalet väljs till 30,0 GPa respektive 0,2.

Plattan analyseras med hjälp av FE-programmet LUSAS [6]. Linjära skalelement (QTS4, fyra noder) och kvadratiske skalelement (QTS8, åtta noder) uppbyggda enligt Reissner-Mindlins platteori används. Elementnät 1 utgörs av ett relativt grovt nät med linjära skalelement med storleken  $0,5 \times 0,5$  m över hela plattan. Elementnät 2 är ett mycket tätare nät med linjära skalelement, där nätet förfinats i närheten av punktlasten. Elementstorleken uppgår här till cirka  $0,05 \times 0,05$  m. I den tredje modellen (elementnät 3) används kvadratiske skalelement med storleken  $0,5 \times 0,5$  m över hela plattan. Symmetri har inte utnyttjats.

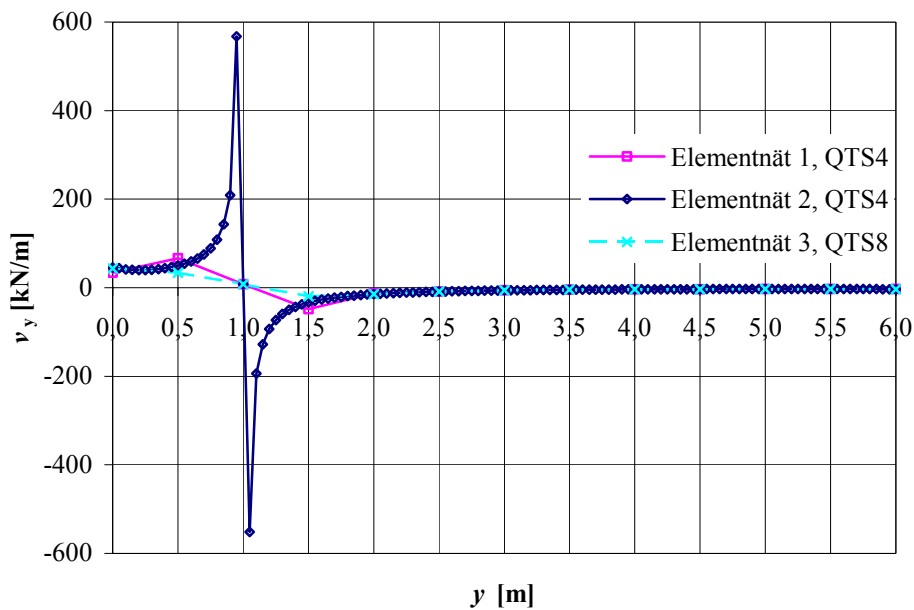
Av Figur 2.3 framgår det hur böjmoment  $m_y$  varierar intill punktlasten beroende på val av elementnät.



Figur 2.3 Böjmoment  $m_y$  (moment i y-riktningen) längs x-axeln för  $y = 1,0$  m.

Skillnaden i resultat mellan de olika analyserna uppgår till nästan 100 % i belastningspunkten. På avståndet en tvärsnittshöjd, 0,5 m, ut från punktlasten är överensstämmelsen emellertid relativt god mellan de olika analyserna.

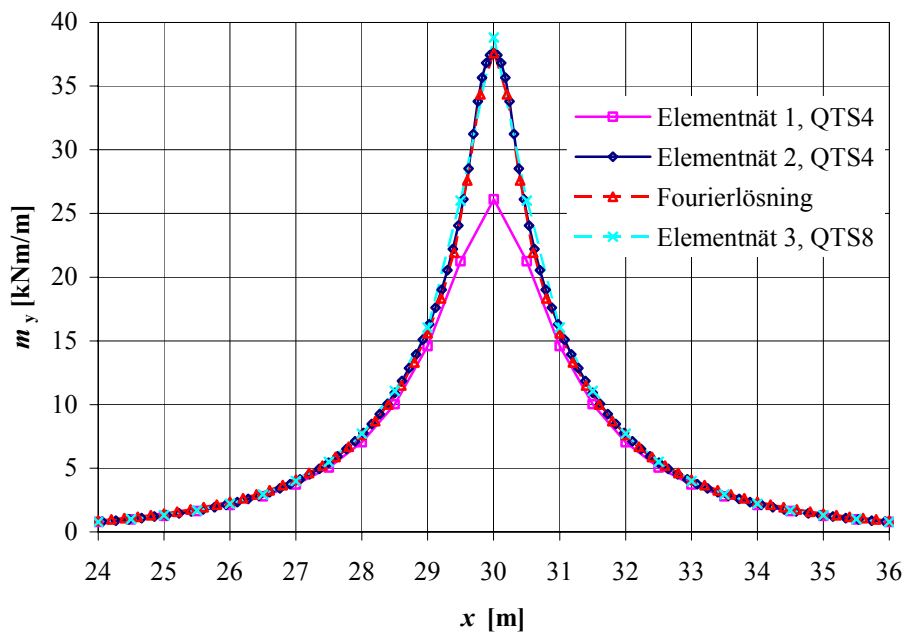
Ännu tydligare framgår skillnaden om man studerar tvärkraften  $v_y$ , där skillnaden uppgår till omkring 800 % mellan respektive största värde, se Figur 2.4. Stor försiktighet bör således iaktas beträffande tolkning av resultatet. Det kan även konstateras att tvärkraften har sitt maximum respektive minimum ett element ut från belastad nod. Detta beror på att tvärkraften växlar tecken och att interpolering av resultatet utförs mellan angränsande element.



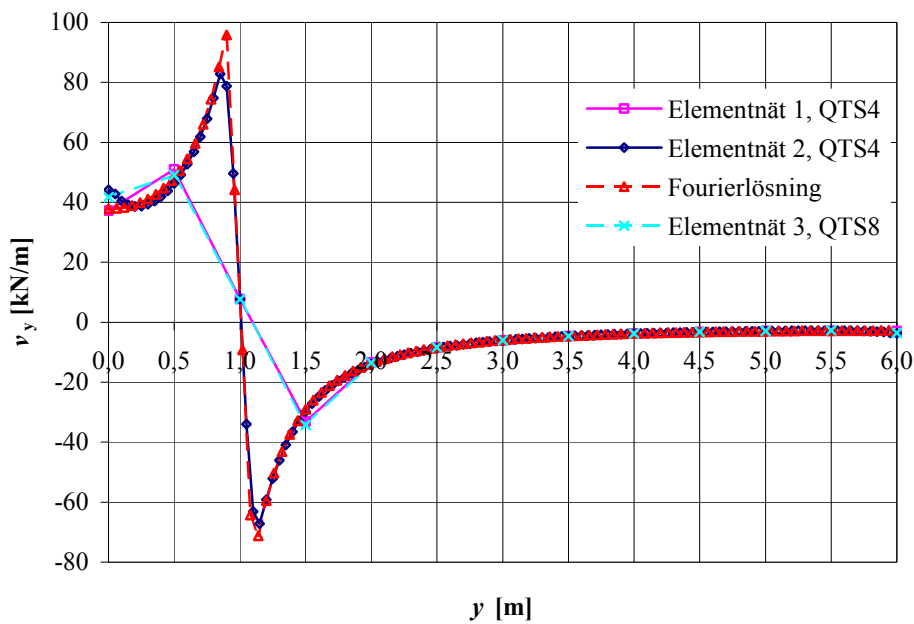
Figur 2.4 Tvärkraft  $v_y$  längs  $y$ -axeln för  $x = 30,0$  m.

Skillnaden hade kunnat vara *ännu större*, om vi för ett *glest* elementnät placerat punktlasten mitt på element och inte som här, ovanför en nod. Punktlasten hade då fördelats ut till elementets noder och värdena på tvärkraften hade blivit ännu mindre.

Låt oss nu byta ut punktlasten (hjultrycket) mot en utbredd last med intensiteten  $p = P/(b_x \cdot b_y) = 125/(0,6 \cdot 0,2) = 1041,7$  kN/m<sup>2</sup>. Resultaten från FE-analysen kan då jämföras med den ”exakta” lösningen från en utveckling i fourierserier [5], se Figur 2.5 och Figur 2.6.



Figur 2.5 Böjmoment  $m_y$  (moment i  $y$ -riktningen) längs  $x$ -axeln för  $y = 1,0$  m.



Figur 2.6 Tvärkraft  $v_y$  längs  $y$ -axeln för  $x = 30,0$  m.

Av Figur 2.5 och Figur 2.6 framgår att resultaten även för detta fall med utbredd hjullast i hög grad beror av valt elementnät. Skillnaden mellan de olika elementnäten är dock något mindre jämfört med analysen med en punktlast. På avståndet en tvärsnittshöjd ut från hjullasten är överensstämmelsen relativt god mellan de olika analyserna. Detta beror på att det grövre elementnätets elementstorlek är ungefär lika med tvärsnittshöjden. För samma elementstorlek ger de kvadratiske elementen ett mer korrekt resultat med avseende på böjmoment än de linjära elementen. Beträffande tvärkraft så ger de kvadratiske och linjära elementen i det här fallet likvärdiga resultat för samma elementstorlek.

För att uppnå resultat som så bra som möjligt överensstämmer med den exakta elasticitetsteoretiska lösningen, bör hjullaster således modelleras som utbredda laster. Frågan är dock om det är nödvändigt att eftersträva den exakta elasticitetsteoretiska lösningen, eftersom tvärkraft direkt under hjullasten inte är av intresse, se vidare kapitel 3.3 beträffande dimensionerande tvärkraft. Uppsprickning av betongen och plasticering av armeringen medför att spänningskoncentrationerna endast är beräkningsmässiga och inte uppstår i den verkliga konstruktionen, se vidare kapitel 3.1. Därför kan snittkrafter och moment fördelas ut på en viss bredd, se kapitel 3.4 beträffande fördelningsbredder. Känsligheten för val av elementnät blir därmed inte lika påtaglig. Val av elementnät, typ av element och sätt att applicera laster på konstruktionen etc. bör emellertid alltid utföras med eftertanke.

### 3 Beräkning av krafter och moment i betongkonstruktioner

I kapitel 3.1 beskrivs verknings sättet hos en armerad betongkonstruktion som belastas i bruks- och brottstadiet och i kapitel 3.2 beskrivs olika beräkningsmodeller vid bestämning av snittkrafter och moment. I kapitel 3.3 redovisas bestämning av den faktiska dimensionerande tvärkraften i ett visst snitt och i kapitel 3.4 beskrivs fördelning av snittkrafter och moment med ledning av befintliga svenska handböcker.

#### 3.1 Armerade betongkonstruktioners verknings sätt

För statiskt obestämda konstruktioner uppfylls jämviktsvillkoren för ett antal olika kraft- och momentfördelningar. Kraft- och momentfördelningen mellan fält och stöd styrs i sin tur av styvhetsfördelningen över konstruktionen. Det innebär att kraft- och momentfördelningen påverkas när konstruktionen börjar spricka. Krafter och moment fördelas då mot områden som är styvare och från spruckna delar, eftersom styvheten i ett sprucket snitt är avsevärt lägre än i ett osprucket snitt och till stor del beror på mängden inlagd armering.

I bruksgränstillstånd är ofta dimensionerande lasteffekt väsentligt större än spricklasten. Hela konstruktionen kan då antas vara böjsprucken, eftersom de kritiska snitten i stor utsträckning påverkar kraft- och momentfördelningen. Styvhetsfördelningen kommer därmed att i huvudsak bero på armeringsfördelningen i de kritiska snitten. Jämfört med en linjärelastisk analys enligt elasticitetsteori – där kraft- och momentfördelningen bestämts utifrån ett rent betongtvärsnitt utan beaktande av sprickbildning och armering – sker en omlagring av krafter och moment mot kraftigt armerade områden och från områden som är svagt armerade. Jämvillkoren är dock hela tiden uppfyllda. Den omlagring som erhålls i bruksgränstillstånd orsakas av sprickbildningen, men dess omfattning beror egentligen av armeringsfördelningen.

När lasten ökar ytterligare till ett begynnande brottstadium, avviker kraft- och momentfördelningen från den som erhållits från en linjärelastisk analys. De kraftigt armerade områdena har dragit till sig större krafter och moment på grund av sprickbildningen. I dessa områden kommer armeringen att flyta innan dimensionerande brottlaster är uppnådd. För de svagt armerade områdena är krafterna och momenten på motsvarande sätt lägre än beräknat. Detta innebär att lasten kan öka under det att armeringen flyter i de mest ansträngda snitten och under det att deformationerna ökar. Följden blir ånyo en kraft- och momentomlagring på grund av armeringens plasticering och eventuell krossning av betongen, d.v.s. en plastisk omlagring. Omlagringen fortgår tills en brottmekanism uppstår och konstruktionen kollapsar. I detta läge överensstämmer kraft- och momentfördelningen med den som erhöles från den linjärelastiska analysen, eftersom snittmomentet inte kan bli större än inlagd kapacitet.

Av detta resonemang framgår att konstruktionen kommer att få *plastiska omlagringar* i längd- och tvärled, även om den dimensioneras utifrån en *linjärelastisk analys*. Dimensioneringen kan således utföras för en godtycklig vald

kraft- och momentfördelning som uppfyller jämviktstvillkoren, eftersom den slutliga fördelningen ändå kommer att tvingas till att överensstämma med inlagda kapaciteter. Omfördelningen är dock bara möjlig om det finns tillräckligt stor plastisk deformationsförmåga.

Dimensionering av armering utgående från en linjärelastisk analys sker enligt en plasticitetsteoretisk princip, d.v.s. kraft- och momentfördelningen beräknas enligt elasticitetsteori, men armeringen dimensioneras enligt plasticitetsteori. Vid dimensioneringen antas, under förutsättning att tvärsnittet inte är överarmerat, att alla armeringsstänger uppnår flytspänningen oavsett aktuell spänning och töjning i motsvarande snitt i beräkningsmodellen. Det väsentliga är att den sammanlagda kapacitet som uppnås med hjälp av armeringen kan balansera de snittkrafter och moment, som erhålls från den förenklade beräkningsmodellen.

### 3.2 Beräkningsmodeller

Vid val av beräkningsmodell bör syftet med strukturanalysen klargöras. Innan armeringen är bestämd kan inte konstruktionens verkningssätt till fullo bestämmas. Förenklade beräkningsmodeller måste då tillgripas. Efter det att armeringen är bestämd kan responsen analyseras. Med respons avses främst kontroll av påkänningar, sprickbredder och deformationer i bruksgränstillstånd men även verkningssättet i brottgränstillstånd kan vara av intresse. Eurocode 2 [7] anger linjär(elastisk) analys, linjär analys med omlagring (plastisk omlagring), plastisk analys (gränslastteori) och olinjär analys som möjliga alternativ för strukturanalys. Alla modeller, förutom olinjär analys, kan anses vara förenklade och kan därför användas, för att dimensionera armeringen.

De spänningar och deformationer som erhålls från en förenklad modell kan generellt inte användas till att bedöma responsen, eftersom sprickbildning och armering inte beaktats i modellen, se kapitel 3.1. För att bedöma responsen i bruks- och brottgränstillstånd erfordras en olinjär analys, som kan utföras först när konstruktionens utformning är fullt känd. I praktiken utförs bara förenklade kontroller av responsen i bruksgränstillstånd t.ex. beträffande sprickbredder.

Analys av armerade betongplattor har tidigare för det mesta utförts med hjälp av standardmetoder i handböcker. Dessa metoder baseras på elasticitetsteori och har justerats med hjälp av gränslastteori (motsvarande linjär analys med omlagring enligt EC 2), för att erhålla ett bättre utnyttjande av armeringen. Standardmetoderna har visat sig ge både ekonomiska och praktiska armeringsfördelningar, men kan vid från elementarfallen avvikande geometri och laster vara svåra att använda.

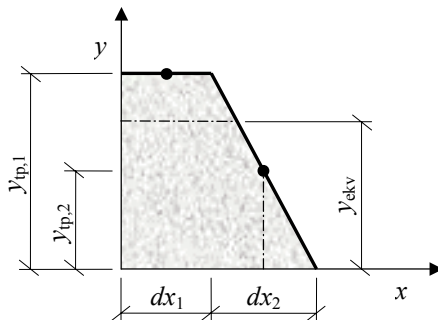
Alternativt kan plattan analyseras enbart med hjälp av gränslastteori, som kan utföras enligt brottlinjeteori eller jämviktsteori (strimlemetod). Plastiska omlagringar förutsätts då kunna ske i brottgränstillståndet, förutsatt att alla krav och begränsningar innehålls, se Betonghandbok – Konstruktion [8]. Bro 2002 [1] anger dock att dimensioneringen skall göras enligt den elasticitetsteoretiska kraft- och momentfördelningen, se vidare kapitel 4.

Vid linjärelastisk analys enligt elasticitetsteori måste den fullständiga kraft- och momentfördelningen beaktas. Vridmomentet får med andra ord inte försummas, se BBK 94 [9], kapitel 6.5.3.2. Detta innebär att beräkningshjälpmedel i form av dator måste tillgripas redan för måttligt geometriskt komplicerade plattor, vanligtvis med hjälp av finita elementmetoden (FEM).

I bruksgränstillståndet bör enligt Betonghandbok – Konstruktion [8] strukturanalysen baseras på elasticitetsteori, vilket är ett förenklat synsätt, se resonemang i kapitel 3.1. Gränslastteoriens momentfördelning kan däremot användas, om avvikelser från det elasticitetsteoretiska stöd- och fältmomentet i längdled är måttlig. En avvikelse på upp emot 30 % i *längdled* kan enligt [8], kapitel 6.2:331, accepteras. Tillämpas stränga krav på sprickviddsbegränsningar kan en avvikelse på 10 % i *längdled* vara fullt godtagbar enligt [8], kapitel 6.5:262, fotnot.

Vid bestämning av dimensionerande krafter och moment, för de fall där upplagen har stor utbredning eller då inspänningen är av stor betydelse, bör teoretisk spännvidd räknas till skärningspunkterna mellan platta och pelare (skivstöd etc.), se Betonghandbok – Konstruktion [8], kapitel 6.5:21. Enligt BBK 94 [9], kapitel 3.2.1.2, antas upplagsstrycket vara koncentrerat nära upplagskanten. I praktiken är erforderlig upplagsbredd i allmänhet så liten, att upplagskraften kan antas verka vid upplagskanten. Dimensionerande stödmoment bestäms således som momentet vid upplagskanten. Detta tillvägagångssätt framgår även av resultaten i kapitel 4.1 och av Enochsson & Dufvenberg [11].

Vid annan form än kvadratisk form på pelaren bestäms upplagskanten lämpligen för en ekvivalent upplagskant, se Figur 3.1, där en fjärdedel av pelaren tagits med.



Figur 3.1 Ekvivalent upplagskant.

Den ekvivalenta upplagskanten parallellt med x-axeln föreslås kunna bestämmas som avståndet från centrum upplag till tyngdpunkten för de olika upplagskanternas längd parallellt x-axeln enligt formeln

$$y_{\text{ekv}} = \frac{\sum_{i=1}^n (dx_i \cdot y_{\text{tp},i})}{\sum_{i=1}^n dx_i} \quad \text{där } x_i > x_{i-1}$$

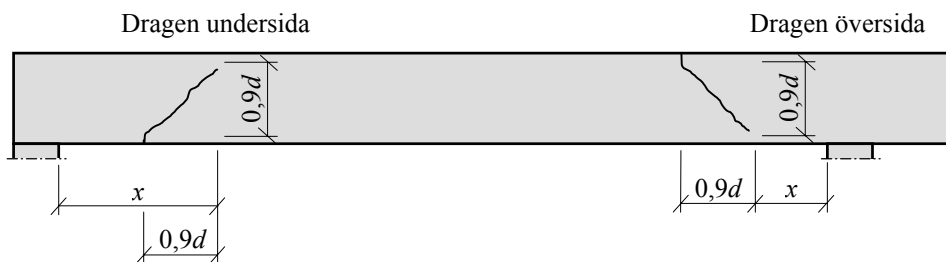
Den ekvivalenta upplagskanten parallellt med  $y$ -axeln bestäms på motsvarande sätt. För en cirkulär pelare blir t.ex. avståndet från centrum upplag till ekvivalent upplagskant  $0,80r$ . Enligt Hillerborg [10] kan upplagskanten läggas utefter sidan av den kvadrat som kan omslutas av det cirkulära tvärsnittet. För den cirkulära pelaren blir i så fall avståndet  $0,71r$  till ekvivalent upplagskant.

Inverkan av vot inom stödområdet kan beaktas genom att öka tvärsnittshöjden på plattan med 25-50 %, se Betonghandbok – Konstruktion [8]. BBK 94 [9], kapitel 6.1, anger att den maximala höjdändringen inte bör uppgå till mer än 33 %.

### 3.3 Dimensionerande tvärkraft

Nedanstående redovisning av bestämning av dimensionerande tvärkraft i ett visst snitt i konstruktionen bygger i huvudsak på Betonghandbok – Konstruktion [8] och Engström [12]. Redovisningen begränsas till att omfatta last som verkar på konstruktionens översida, vilket är det vanligaste vid analys av brokonstruktioner.

Med dimensionerande tvärkraft avses den tvärkraft som faktiskt skall föras förbi en sned skjvspricka, som är kopplad till snittet i fråga. Den tvärkraft som erhålls i ett visst snitt i beräkningsmodellen kan därför avvika från den faktiska dimensionerande tvärkraften. Avvikelsen beror på att skjvsnitten i betongkonstruktioner är sneda med en vinkel som uppgår till 20-60° mot horisontalplanet. Vanligtvis antas vinkeln uppgå till 45° vid kontroll av tvärkraftskapacitet. Beräkningssnittet kopplas då till det snitt där den sneda sprickan möter tryckresultanten. Det innebär att beräkningssnittet  $x$  blir olika beroende på om momentet är positivt (dragen undersida) eller negativt (dragen översida), se Figur 3.2. Alla snittegenskaper såsom effektiv höjd, böjmoment, armering som har en längd av minst  $d + l_b$  förbi beräkningssnittet etc. hänförs till beräkningssnittet.



Figur 3.2 Dimensionerande tvärkraft som skall föras förbi sned skjvspricka.

För konstruktionsdelar med *positivt moment* sammanfaller dimensionerande tvärkraft med den tvärkraft, som erhålls från det vertikala snittet i beräkningsmodellen. För konstruktionsdelar med *negativt moment* sammanfaller däremot *inte* dimensionerande tvärkraft med tvärkraften från beräkningsmodellen. Den dimensionerande tvärkraften är här mindre än i beräkningssnittet. Minskningen motsvarar den last som påförs över den sneda sprickan. Detta gäller dock bara under förutsättning att lasterna *verkar* på konstruktionens *översida*. Vid last verkande på konstruktionens undersida kan istället ett tvärkraftstillskott erhållas, se vidare Betonghandboken – Konstruktion [8], kapitel 3.7:37.



Normalt måste det förutsättas att sneda skjuvsprickor finns i hela konstruktionen fram till upplagets kant. Tvärkraften bör därmed inte behöva kontrolleras inom ett avstånd uppgående till  $0,9d$  från upplag, d.v.s.  $x \geq 0,9d$  inom områden med positivt moment och  $x \geq 0$  inom områden med negativt moment. Eurocode 2 [7], kapitel 6.2.1, anger att tvärkraft inte behöver kontrolleras inom ett avstånd  $1,0d$  från upplag för dominerande jämt utbredd last, förutsatt att risken för tryckbrott i livet kontrolleras vid upplag. För ett fall med koncentrerade laster i närheten av upplag anges vidare i Eurocode 2, kapitel 6.2.2, att tvärkraft inte behöver kontrolleras i snitt som ligger närmare upplag än en punkt, som är skärningspunkten mellan det ospruckna tvärsnittets tyngdpunktsaxel och en tänkt linje med lutningen  $45^\circ$  från den yttre kanten av lastytan.

För plattor bör tvärkraften i plattans båda riktningar beaktas vid beräkning av dimensionerande tvärkraft. Enligt praxis i Sverige kontrolleras skjuvning i plattor endast för en riktning åt gången. Metoderna i BBK 94 baseras dock på att balken eller plattan huvudsakligen bär last i en riktning. För de flesta fall är detta antagande tillräckligt, men vid en noggrannare analys bör tvärkraften i andra riktningen också beaktas. Marti [13] föreslår att den dimensionerande tvärkraften i plattor bestäms som

$$v_d = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

och där vinkeln i förhållande till x-axeln uppgår till

$$\varphi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Tvärkraften kontrolleras i varje punkt i plattan. För  $\varphi < 45^\circ$  utförs kontrollen parallellt med x-axeln och för  $\varphi > 45^\circ$  parallellt med y-axeln.

Förfinade metoder att beakta tvärkraft, inom områden där balkteorin gäller, är den s.k. modifierade tryckfältsteorin (Modified Compression Field Theory), se t.ex. Bentz [14] och Collins och Vecchio [15].

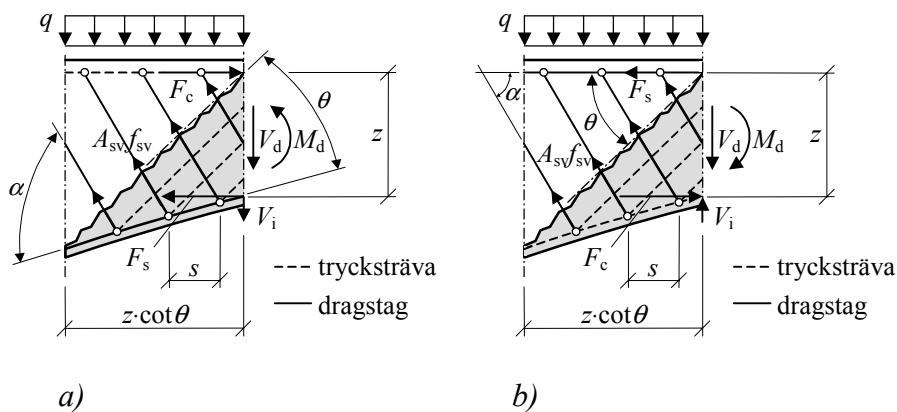
Områden i närheten av upplag och punktlaster utgör diskontinuitetszoner, där den vanliga balkteorin inte stämmer, se även kapitel 2.2. Intill upplaget går lasten som en sned trycksträva ned i upplaget. Betongen påverkas även av inspänningseffekter från upplaget och själva lasten. En modell som kan användas, både för att analysera diskontinuitetszoner och områden där balkteorin gäller, är en fackverksmodell. En fackverksmodell tydliggör kraftspelet och verkningssättet i konstruktionen på ett effektivt sätt, se Figur 3.3.

Betongens låga draghållfasthet medför att böjskjuvsprickor uppkommer tidigt. Efter uppsprickning kommer de resulterande tryckkrafterna i huvudtryckpåkänningsriktningen koncentreras till betongtrycksträvor mellan skjuvsprickorna. Tryckkraften i strävorna måste då lyftas upp i konstruktionen av tvärkraftsarmeringen, för att jämvikt skall vara uppfylld. Hela tvärkraften överförs därmed genom tvärkrafts-

armeringen. Dragkraftstillskottet från tryckstävorna till huvudarmeringen erhålls också direkt ur modellen. I noderna kan stora koncentrerade krafter mötas och fordrar därför noggrann kontroll.

I en fackverksmodell kan lutningen  $\theta$  på böjskjuvsprickorna väljas relativt fritt mellan 20-60°, som tidigare nämnts. Beroende på hur tryck- och dragresultanten lutar kan även ett tillskott eller avdrag  $V_i$  erhållas till den totala tvärkraftskapaciteten.

För vidare information angående fackverksmodeller hänvisas till Eurocode 2 [7] samt Schlaich och Schäfer [16].



Figur 3.3 a) Fackverksmodell för ett balkelement med positivt moment.  
b) Fackverksmodell för ett balkelement med negativt moment.

Ett approximativt sätt att beakta förhållandena vid upplag inom ramarna för balkteorin utgör metoden med förhöjd skjuvhållfasthet, se Betonghandboken – Konstruktion [8], kapitel 3.7:33. Den formella skjuvhållfastheten enligt additionsteorin i BBK 94 [9] får då ökas inom ett område  $3d$  ut från upplag med hänsyn till inverkan av last nära upplag. Gynnsam inverkan av last nära koncentrerat upplag, såsom pelare och lager, bör dock inte utnyttjas med ledning av Betonghandbok – Konstruktion [8], kapitel 6.9:232. Detta gäller även konstruktionsdelar med inskurna eller upphängda upplag.

### 3.4 Fördelning av krafter och moment enligt svenska handböcker

Betongplattor armerade i två riktningar uppvisar vanligen stor förmåga till plastiska omlagringar i ett brottgränstillstånd. Förmågan till omlagringar är då kopplad till konstruktionens plastiska deformationsförmåga. Konstruktören har därför stor möjlighet att fritt välja en lämplig armeringsfördelning, se kapitel 3.1. Stor omsorg måste emellertid läggas vid andra brottmoder såsom genomstansning.

I bruksgränstillstånd sker kraft- och momentomlagringar på grund av att betongen spricker. I bruksgränstillstånd kan dock inte graden av omlagring väljas, eftersom omlagringen helt bestäms av aktuella styvhetsförhållanden. Några generella rekommendationer avseende av fördelningsbredder i bruksgränstillstånd är därför svåra att ge. I de studerade handböckerna ges dock rekommendationer av

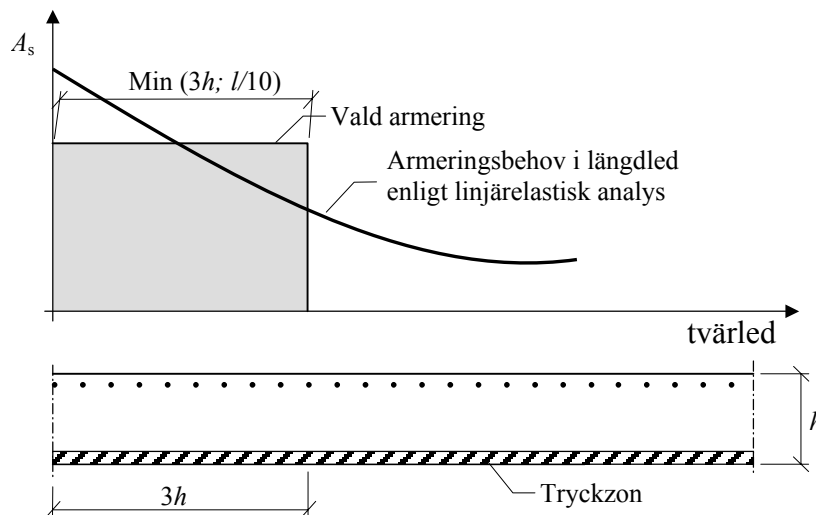
fördelningsbredder generellt, d.v.s. ingen distinktion görs mellan brott- och bruksgränstillstånd. Vissa rekommendationer och begränsningar återfinns dock beträffande bruksgränstillstånd.

Även när det gäller tvärkraft så styrs omlagringen för konstruktionsdelar utan tvärkraftsarmering av sprickbildningen som ej beaktas i den linjärelastiska analysen.

Nedan redovisas hur snittkrafter och moment kan fördelas utifrån rekommendationer i svenska handböcker. I kapitel 3.4.1 behandlas utjämning av moment i tvärled och i kapitel 3.4.2 behandlas utjämning av tvärkraft i tvärled. Fördelningarna innebär en omfördelning i *tvärled* i förhållande till studerad lastbärningsriktning av de snittkrafter och moment, som erhålls från en linjärelastisk 3D FE-analys. Valmöjligheter finns dessutom beträffande omfördelning i *längdled* mellan stöd och fält, vilket dock inte utvecklas ytterligare här.

### 3.4.1 Fördelning av moment i tvärled

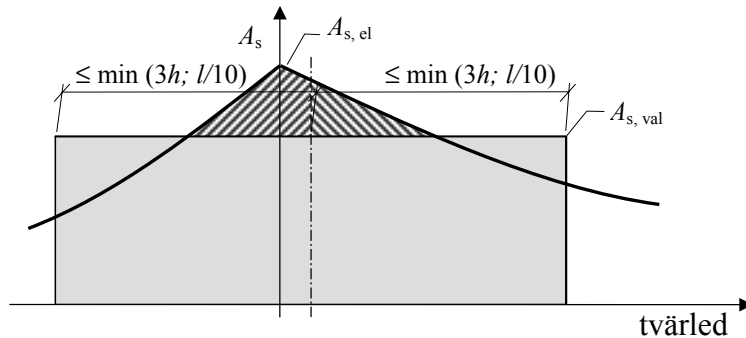
Vid dimensionering för moment får, om momentet varierar i ett snitt vinkelrätt mot armeringen, dimensionering utföras för ett medelmoment inom ett område med en viss bredd, förutsatt att plattans bärförmåga inte försämras. se BBK 94 [9], kapitel 6.5.3.1. En armeringsstång kan också antas samverka med betong inom ett avstånd som är högst lika med tre gånger plattans tjocklek. Avståndet får dock högst uppgå till 1/10 av spännvidden i armeringsstångens riktning. Armeringen betraktas då som kontinuerligt fördelad i tvärled, se Figur 3.4. Inlagd momentkapacitet måste dock bli lika eller större än medelmomentet enligt analysen.



Figur 3.4 Verksam plattbredd och fördelningsbredd för moment i längdled intill ett snitt med koncentrerat armeringsbehov enligt linjärelastisk analys.

Enligt Bro 2002 [1], bilaga 4-5.2, får utjämningsbredden för moment och tvärkraft väljas till det minsta av tre gånger plattans tjocklek eller 1/10 av den vinkelräta spännvidden för snedvinkliga plattramar.

Således kan fördelningsbredden för moment vid en kantstrimla antas uppgå till det minsta av  $3h$  eller  $l/10$  och över ett punktstöd till högst *två* gånger det minsta av  $3h$  eller  $l/10$ , se Figur 3.5. För armerade plattor, där tvärsnittshöjden normalt väljs mellan  $l/20$  till  $l/10$  för brokonstruktioner, kommer alltid begränsningen på  $1/10$  av spännvidden att vara dimensionerande. Fördelningsbredden bör dock inte behöva väljas mindre än  $1h$ , vilket skulle vara aktuellt för plattor med ett höjds-spännviddsförhållande på mindre än 1:10.



Figur 3.5 Total fördelningsbredd för moment i längdled över stöd.

Enligt Betonghandbok – Konstruktion [8], kapitel 6.5:27, där dimensionering av pelarunderstödda plattor med hjälp av strimleporten behandlas, får t.ex. armering över innerstöd koncentreras till en bredd högst lika med halva strimleporten åt vardera hållet. Vanligtvis uppgår strimleporten till  $c$ , som är avståndet från pelarcentrum till tvärkraftnollpunkten. Fördelningsbredden väljs lika åt båda hållen eller t.o.m. minst i den korta spännviddens riktning. Vid *låga* krav på sprickbredds begränsning *koncentreras* således armeringen till ett område kring innerstödet. Vid *höga* krav på sprickbredds begränsning, såsom i broar, bör däremot en del av armeringen *fördelas* på hela strimleporten för t.ex. halva medelstöd-momentet.

Omfördelningen av armeringen från stödet bör begränsas av att armeringen gör mer nytta där krökningen är stor, d.v.s. i närheten av punktupplag och utifrån krav i bruksgränstillstånd på sprickbredds begränsningar, se Betonghandbok – Konstruktion [8], kapitel 6.5:31. Fördelningsbredden i bruksgränstillstånd bör således vara mindre än i brottgränstillstånd för de flesta fall. Avvikelse på 10-30 %, som tidigare nämnts, från den elasticitetsteoretiska fördelningen avser endast omfördelningar i längdled och är därför inte tillämpliga här.

Låt oss gå tillbaka till exemplet i kapitel 2.2. I handboken Bygg – Konstruktionsteknik [17], kapitel 336:121 finns ett approximativt sätt att beräkna en fördelningsbredd för moment av hjullast, se Figur 3.6, och som används än idag.

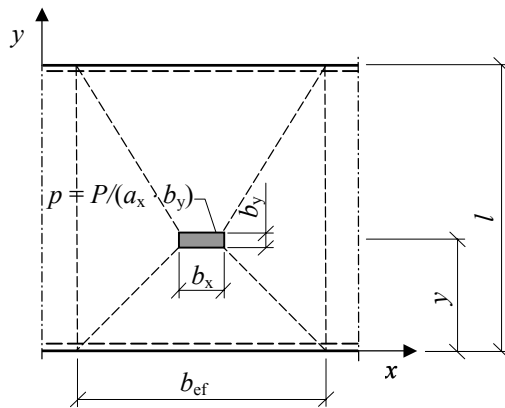
$$b_{ef} = b_x + t_{bel} + t_{\bar{o}} + \min(0,75l; 2,5) = b + \min(0,75l; 2,5)$$

där

$l$  = teoretisk spännvidd

$t_{bel}$  = tjocklek beläggning

$t_{\bar{o}}$  = tjocklek överfyllning



Figur 3.6 Fördelningsbredd för moment av enstaka hjullast enligt handboken Bygg.

I Vägverkets publikation "Klassningsberäkning av vägbroar" [18], kapitel 4.1.2.6.1, finns följande ekvation som liknar ovanstående ekvation.

$$b_{ef} = 0,20 + t_{bel} + t_{\bar{o}} + t_{tb} + \min(0,75l; 2,70)$$

$t_{tb}$  = tjocklek täckande betongskikt

Skillnaden består i att  $b_x$  har satts till 0,20 m, 2,5 m har ersatts av 2,7 m och en term, tjocklek täckande betongskikt, har tillkommit. (Termen "tjocklek täckande betongskikt" kan vara en feltolkning av ordet täckskikt i handboken Bygg, som inte avser täckskikt betong, utan täckskikt beläggning. Orsaken kan också vara att handboken Bygg använder beteckningen  $d$  för plattans tjocklek och  $h$  för effektiva höjden, vilket är tvärtom mot gängse beteckning idag.)

Vid två näraliggande hjullaster kan ovanstående ekvation i Bygg justeras till

$$b_{ef} = 2b + \min(1,5l; 2,5 + c_x - b; 0,75l + c_x - b)$$

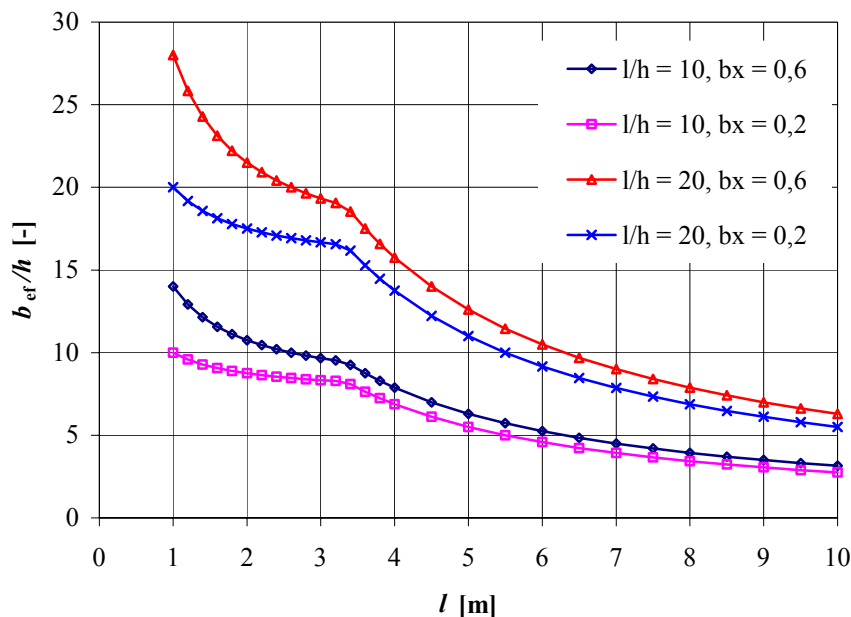
$c_x$  = avstånd mellan de två hjultrycken i x - led

Ekvationen i "Klassningsberäkning av vägbroar" justeras på motsvarande sätt till

$$b_{ef} = 0,20 + t_{bel} + t_{\bar{o}} + t_{tb} + c_x + \min(0,75l; 2,70)$$

Av Figur 3.7 framgår fördelningsbredden för moment av en enstaka hjullast uttryckt i tvärsnittshöjden  $h$  enligt handboken Bygg. Fördelningsbredden har beräknats för två fall, ett fall med  $b_x = 0,6$  m och ett med  $b_x = 0,2$  m, under antagandet att

$t_{\text{bel}} + t_{\text{ö}} = 0,05$  m. Noterbart är att fördelningsbredden är oberoende av hjullastens placering och att fördelningsbredden i förhållande till tvärsnittshöjden ökar kraftigt vid kortare spännvidder för konstant förhållande mellan höjd och spännvidd.



Figur 3.7 Fördelningsbredd för moment av enstaka hjullast enligt handboken Bygg som funktion av spännvidd, spännviddsförhållande och lastyta.

Med  $l = 6,0$  m,  $y = 1,0$  m,  $b = b_x = 0,6$  m och  $b_y = 0,2$  m, jämför Figur 2.2, erhålls enligt handboken Bygg – Konstruktionsteknik [17]

$$b_{\text{ef}} = 0,6 + \min(0,75 \cdot 6,0; 2,5) = 0,6 + 2,5 = 3,1 \text{ m}$$

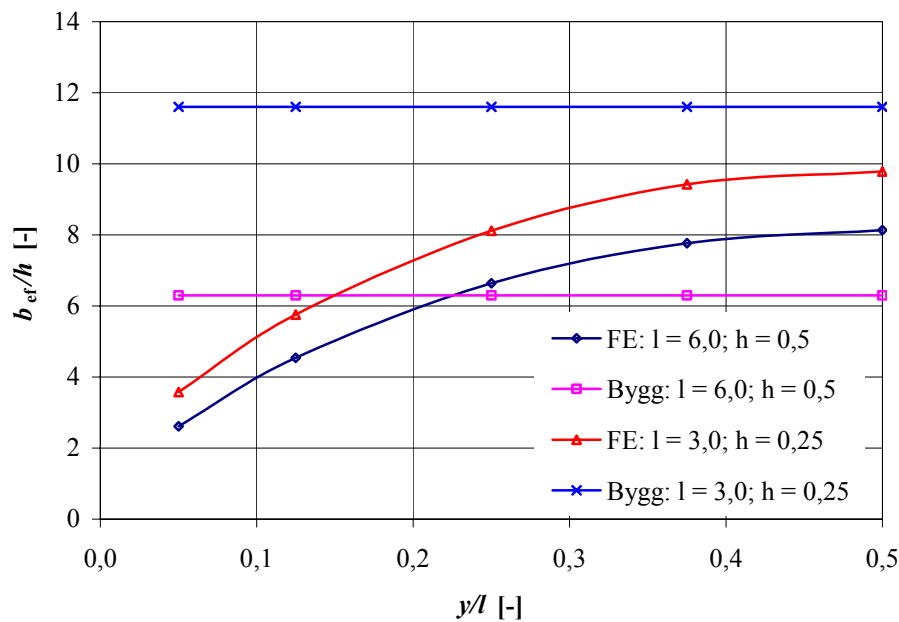
$$m_y = \left( \frac{P(l-y)}{l} \cdot y - \frac{P \cdot b_y}{2 \cdot 4} \right) \cdot \frac{1}{b_{\text{ef}}} = \left( \frac{125 \cdot (6,0 - 1,0)}{6,0} \cdot 1,0 - \frac{125 \cdot 0,2}{2 \cdot 4} \right) \cdot \frac{1}{3,1} = 32,6 \text{ kNm/m}$$

Från FE-analysen med tätare elementindelning och fourierserietvecklingen erhålls toppvärdet  $m_y = 37,6$  kNm/m, se Figur 2.5. Utnyttjas en fördelningsbredd  $i$  brottgränstillstånd på

$$b_{\text{ef,tot}} = 2 \cdot \min(3h; l/10) = 2 \cdot \min(3 \cdot 0,5; 6,0/10) = 1,2 \text{ m}$$

enligt principerna i detta kapitel erhålls ett dimensionerande moment,  $m_y$ , på cirka 33 kNm/m, vilket kan jämföras med  $m_y = 32,6$  kNm/m enligt handboken Bygg.

I Figur 3.8 redovisas fördelningsbredden för moment av enstaka hjullast verkande på avståndet  $y/l$  från upplag. Förhållandet mellan höjd och spännvidd är satt till 1:12 och  $b_x = 0,6$  m samt  $b_y = 0,2$  m. Fördelningsbredderna baserade på resultaten från FE-analysen beräknas genom att fördela ut de *linjärelastiska toppvärdena* på så sätt att momentet blir samma som i en 2D balkmodell. FE-analysen är utförd med LUSAS [6] och linjära skalelement (QTS4, fyra noder).



Figur 3.8 Fördelningsbredd för moment av enstaka hjullast enligt linjärelastisk FE-analys och handboken Bygg som funktion av spännvidd, tvärsnittshöjd och hjullastplacering.

Av Figur 3.8 framgår att fördelningsbredden enligt Bygg – Konstruktionsteknik [17] är konstant för respektive spännvidd oavsett var hjullasten är placerad, medan den linjärelastiska FE-analysen ger en kraftigt minskande fördelningsbredd vid hjullastplacering nära stöd. I fältmitt, som är viktigast, ligger handboksmetoden både på säker och osäker sida jämfört med den linjärelastiska FE-analysen beroende på spännvidd. Variationen uppgår till omkring  $\pm 25\%$ . Vid kortare spännvidder är fördelningsbredden enligt FE-analysen mindre oavsett var hjullasten är placerad.

I det fall ytterligare fördelning, enligt tidigare presenterade principer ( $\min(3h; l/10)$ ), av de linjärelastiska resultaten från FE-analyserna utnyttjas kan dessa fördelningsbredder här ökas med 10-20 %.

I stort sett överensstämmer fördelningsbredden *i fält* enligt Bygg – Konstruktionsteknik [17], för det här studerade fallet, med fördelningsbredden beräknad från en linjärelastisk FE-analys och med fördelning enligt principer presenterade ovan ( $\min(3h; l/10)$ ). Bygg – Konstruktionsteknik tar ej hänsyn till minskande fördelningsbredd närmare stöd. Avkortning av armering bör därför utföras med försiktighet, när fördelningsbredder enligt Bygg – Konstruktionsteknik används.

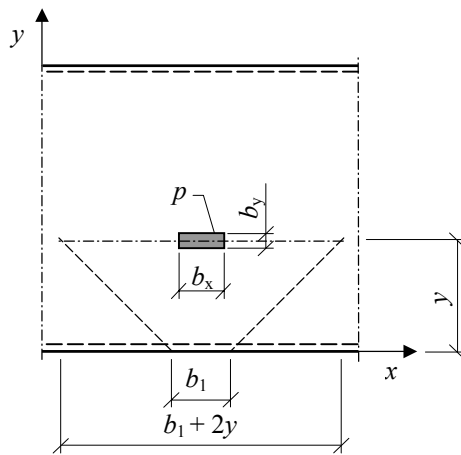
### 3.4.2 Fördelning av tvärkraft i tvärled

Beträffande fördelning av tvärkraft ger Betonghandbok – Konstruktion [8] ingen ytterligare information jämfört med BBK 94 [9] beträffande skjuvning vid koncentrerade laster. BBK 94 [9], kapitel 6.5.5, är dock *enbart giltig* under förutsättning att plattan är upplagd på *linjeupplag*, se beskrivning nedan.

Låt oss återigen gå tillbaka till exemplet i kapitel 2.2. I handboken Bygg – Konstruktionsteknik [17], kapitel 336:121 finns ett approximativt sätt att beräkna en fördelningsbredd för tvärkraft av hjullast, se Figur 3.9. Ekvationen gäller under förutsättning att plattan är upplagd på linjeupplag. Observera att handboken Bygg använder beteckningen  $d$  för plattans tjocklek och  $h$  för effektiva höjden, vilket är tvärtom mot gängse beteckning idag.

$$b_1 = \max(b_x + 2(t_{\text{bel}} + t_{\text{ö}} + h_{\text{min}}); 5h_{\text{min}})$$

$$h_{\text{min}} = \text{minsta tvärsnittshöjden}$$



Figur 3.9 Fördelningsbredd för tvärkraft av hjullast enligt handboken Bygg.

Skjuvpåkänningen, som beräknas med denna fördelningsbredd, multipliceras med en reduktionsfaktor  $f$ :

$$f = \frac{4 + y/d}{8} \text{ för } y \leq 4d \text{ och } f = 1 \text{ för } y > 4d$$

Den slutliga fördelningsbredden kan således uttryckas som

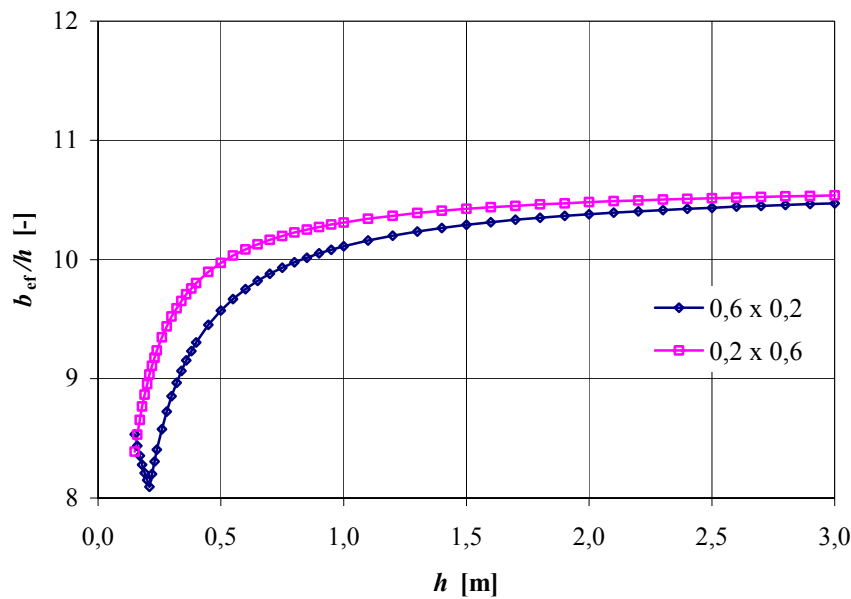
$$b_{\text{ef}} = \frac{1}{f} \cdot (\max(b_x + 2(t_{\text{bel}} + t_{\text{ö}} + h_{\text{min}}); 5h_{\text{min}}) + 2y)$$

BBK 94 [9], kapitel 6.5.5, ger följande uttryck för bestämning av fördelningsbredd för tvärkraft under förutsättning att plattan är upplagd på linjeupplag

$$b_{\text{ef}} = \max(7d_{\text{min}} + b_x + t_{\text{bel}} + t_{\text{ö}}; 10d_{\text{min}} + 1,3y)$$

Vid två näraliggande hjullaster justeras ovanstående formel enligt BBK 94 [9], kapitel 6.5.5. Jämför man de olika ekvationerna i handboken Bygg och BBK 94 ser man flera likheter. Av Figur 3.10 framgår fördelningsbredden för tvärkraft av en enstaka hjullast uttryckt i tvärsnittshöjden  $h$  enligt BBK 94. Fördelningsbredden har beräknats för två fall, ett fall med  $b_x \cdot b_y = 0,6 \cdot 0,2$  m och ett med  $b_x \cdot b_y = 0,2 \cdot 0,6$  m, under antagandet att  $d = h - 0,06$  m och  $t_{\text{bel}} + t_{\text{ö}} = 0,05$  m.





Figur 3.10 Fördelningsbredd för tvärkraft av enstaka hjullast enligt BBK 94 som funktion av tvärsnittshöjd.

För fallet  $b_x \cdot b_y = 0,6 \cdot 0,2$  m finns ett lokalt minimum vid  $h = 0,21$  m för det studerade fallet. Vid tunnare tvärsnitt blir den första formeln dimensionerande och vid tjockare tvärsnitt blir den andra formeln dimensionerande. För vårt exempel med  $b_x \cdot b_y = 0,6 \cdot 0,2$  m och  $h = 0,5$  m erhålls

$$b_{ef} = 9,57 \cdot 0,5 = 4,79 \text{ m}$$

$$v_y = \frac{P(l-y)}{l} \cdot \frac{1}{b_{ef}} = \frac{125 \cdot (6,0 - 1,0)}{6,0} \cdot \frac{1}{4,8} = 21,7 \text{ kN/m}$$

Den gynnsamma inverkan av lastangrepp nära upplag är redan inkluderad i formeln enligt BBK 94 [9]. Därför justeras fördelningsbredden enligt BBK 94 med faktorn

$$f = \frac{v_y}{v_{y,red}}$$

Den reducerade tvärkraften,  $v_{y,red}$ , är svår att korrekt bestämma direkt från en 3D FE-analys med skal- eller plattelement. För en fritt upplagd balk är dock faktorn enkel att bestämma.

$$f = \frac{v_y}{v_{y,red}} = \left( \frac{125 \cdot (6,0 - 1,0)}{6,0} \right) / \left( \frac{125 \cdot (6,0 - 1,0)}{6,0} - \left( 1 - \frac{1,0}{3 \cdot 0,44} \right) \cdot 125 \right) = 1,41$$

Värdet på faktorn kan dock högst uppgå till

$$f \leq \frac{f_{ct}}{f_{cv}} = \frac{f_{ct}}{\xi(1 + 50\rho) \cdot 0,3f_{ct}}$$

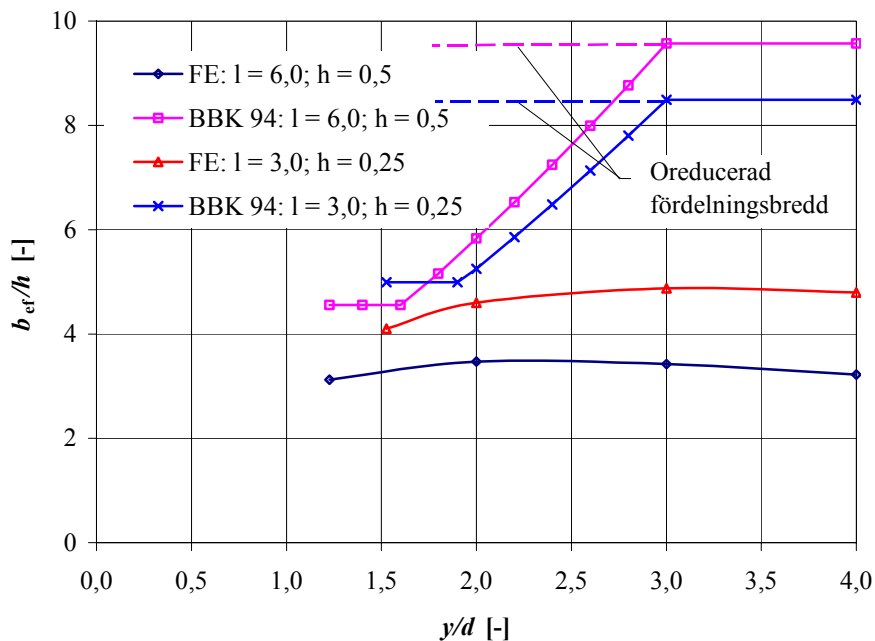
Antag  $\xi = 1,6 - 0,44 = 1,16$  och  $\rho = 0,008$ , vilket ger

$$f \leq \frac{f_{ct}}{1,16(1 + 50 \cdot 0,008) \cdot 0,3f_{ct}} = 2,1 > 1,41$$

Den justerade fördelningsbredden enligt BBK 94 blir då

$$b_{ef} = 4,79/1,41 = 3,4 \text{ m}$$

Från FE-analysen med tätare elementindelning erhålls  $v_y = 59,9 \text{ kNm/m}$  på ett avstånd  $y = d/2 + b_y/2 = 0,32 \text{ m}$  från centrum hjullast, vilket innebär en fördelningsbredd på  $(125 \cdot 5/6)/59,9 = 1,74 \text{ m} = 3,5h$ . I Figur 3.11 redovisas fördelningsbredden för tvärkraft av enstaka hjullast verkande på avståndet  $y/d$  från upplag enligt resultat från en linjärelastisk FE-analys med tät elementindelning och BBK 94, kapitel 6.5.5. Förhållandet mellan höjd och spännvidd är satt till 1:12 och  $b_x = 0,6 \text{ m}$  samt  $b_y = 0,2 \text{ m}$ .



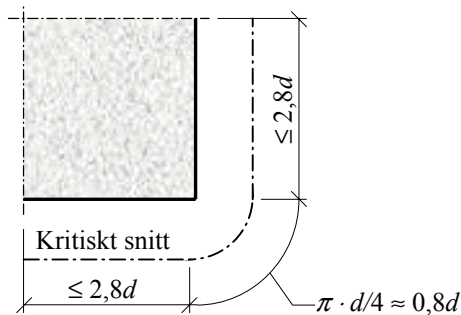
Figur 3.11 Fördelningsbredd för tvärkraft av enstaka hjullast enligt linjärelastisk FE-analys och BBK 94 som funktion av spännvidd, tvärsnittshöjd och hjullastplacering.

Fördelningsbredden i Figur 3.11 bestämd enligt BBK 94 har justerats med hänsyn till inverkan av last nära upplag genom att dividera med faktorn  $f$  för olika placeringar på hjullasten. Detta görs för att kunna jämföra resultaten från den linjärelastiska FE-analysen med BBK 94. Faktorn  $f$  bestäms enligt ovan och maximeras till 2,1 för  $h = 0,50 \text{ m}$  och till  $\xi(0,5)/\xi(0,25) \cdot 2,1 = 1,16/1,4 \cdot 2,1 = 1,7$  för  $h = 0,25 \text{ m}$ . Kritiskt snitt antas ligga på avståndet  $y = d/2 + b_y/2$  från centrum hjullast enligt BBK 94, figur 6.5.5a. Enligt principer redovisade i kapitel 3.3 borde egentligen dimensionerande tvärkraft bestämts för snittet  $y = 0,9d + b_y/2$  från centrum hjullast

(ca  $0,5d + b_y/2$  enligt principer i EC2). Hjullasten behöver inte placeras närmare upplag än  $0,9d$  (ca  $0,5d$  enligt EC2).

Det kan konstateras, vilket även baseras på erfarenheter från andra analyser, att BBK 94 [9], kapitel 6.5.5 ger en fördelaktig fördelningsbredd för tvärkraft jämfört med linjärelastiska FE-analyser. Detta gäller även om den gynnsamma inverkan av last nära upplag beaktas. BBK 94 redovisar inte hur stor inverkan av last nära upplag har på beräknad fördelningsbredd enligt kapitel 6.5.5. Om den ovan beräknade faktorn  $f$  är mindre än vad som beaktats i BBK 94, kapitel 6.5.5, blir skillnaden mellan FE-analysen och BBK 94 ännu större. Stora omlagringar av tvärkraft tillåts således i brottgränstillstånd enligt BBK 94 för plattor upplagda på linjeupplag. Dimensioneringsförfarandet i BBK 94 med en formell skjuvhållfasthet är dock ytterst formellt, eftersom ett tvärkraftsbrott innebär att en del av konstruktionen separerar från resten längs sneda skjuvsprickor, se kapitel 3.3.

I en platta understödd av punktupplag kan en annan brottmod bli aktuell – genomstansning. Risken för genomstansning kontrolleras med metoder enligt BBK 94 [9], kapitel 6.5.4, eller Betonghandbok – Konstruktion [8], kapitel 6.5:34.



Figur 3.12 Kritisk snittlängd för genomstansning enligt BBK 94[9].

Den längsta möjliga snittlängden för både genomstansning och skjuvning i en kvadrant uppgår således till  $u \leq 2,8d + 2,8d + 0,8d = 6,4d$ , jämför Figur 3.12. Detta värde överensstämmer återigen väl med vad BBK 94 säger om enkelspända balkar. För balkar med tvåsidig uppläggning och  $l/h > 3$  och för konsoler med  $l/h > 1,5$  får tvärkraften antas vara jämnt fördelad över hela bredden, se BBK 94, kapitel 3.7.1. Bredden kan då antas vara högst  $5h$ , vilket här motsvaras av  $6,4d \approx 4,9h - 6,2h$  för tvärsnittshöjder mellan 0,2 m och 2,0 m. Tvärkraften föreslås därför kunna fördelas på en *fördelningsbredd* uppgående till högst  $5h$ . Vid t.ex. kantupplag reduceras denna fördelningsbredd till

$$b_{ef} \leq 2,5h + a \leq 5h$$

$a$  = är avståndet till kant från kritisk punkt

## 4 Strukturanalys av brokonstruktioner med FEM

Analys av olika byggnadskonstruktioner såsom broar utförs ofta med användande av finita elementmetoden (FEM). Vanligtvis utförs linjärelastiska FE-analyser med någon typ av tvådimensionellt (2D) ramprogram på en s.k. ”standardnivå”, se Plos och Gylltoft [19]. Nästa steg med avseende på noggrannhet utgörs av tredimensionella (3D) FE-analyser med användande av balkelement (3D rammodell) och skalelement (3D skalmodell). Skalelementen kan eventuellt användas i kombination med balkelement.

Fullständig olinjär analys med avseende på material och 3D analys med volymelement är än så länge inte praktisk möjlig när t.ex. en bro skall konstrueras. I en olinjär analys kan inte lastfallen superponeras, vilket innebär att analysarbetet blir mycket arbetskrävande. För mer information beträffande användande av tredimensionella beräkningsmodeller och interaktion mellan CAD- och FE-program hänvisas till [4].

Bro 2002 [1] anger att dimensioneringen skall göras enligt den elasticitetsteoretiska snittkrafts- och momentfördelningen, förutom för olyckslast där gränslastteori får användas. Orsaken till denna begränsning är enligt Plos och Gylltoft [19] att man på ett förenklat sätt undviker val av moment- och snittkraftsfördelningar, som kräver alltför stora plastiska omlagringar i brottgränstillstånd. Den elasticitetsteoretiska fördelningen anses även utgöra ett tillräckligt bra underlag för hur armeringen skall fördelas, för att undvika alltför stora sprickor och deformationer i bruksstadiet.

Detta krav innebär, om man hårdrar det, en effektiv hämsko för 3D FE-analyser med skalelement. En strikt dimensionering av armeringen enligt den linjärelastiska snittkrafts- och momentfördelningen ger en mycket oekonomisk och i praktiken ogenomförbar armeringsfördelning. När upplag modelleras som koncentrerade upplag och hjullaster som punktlaster, kan inte beräkningsmodellen på ett korrekt sätt beskriva dessa områden, se även kapitel 2.2. Resultatet i dessa områden måste därför tolkas, för att kunna användas.

Vid användning av förenklade strukturanalyser såsom 2D ramanalyser av en tredimensionell struktur uppfylls i själva verket kravet i Bro 2002 på en strikt fördelning enligt elasticitetsteori endast skenbart. Olika effekter som erhålls i en 3D skalmodell kan inte spåras i en 2D rammodell. Genom att välja att analysera strukturen som en tvådimensionell ram, har konstruktören redan gjort en omfördelning av krafter och moment i tvärled innan själva analysen och dimensioneringen har utförts. Dimensioneringen av armeringen baseras sedan på dessa ”elasticitetsteoretiska” resultat och kravet i Bro 2002 är därmed till synes uppfyllt. Eventuellt koncentreras en del av stödarmeringen över koncentrerade upplag för att till viss del efterlikna den linjärelastiska snittkrafts- och momentfördelningen.

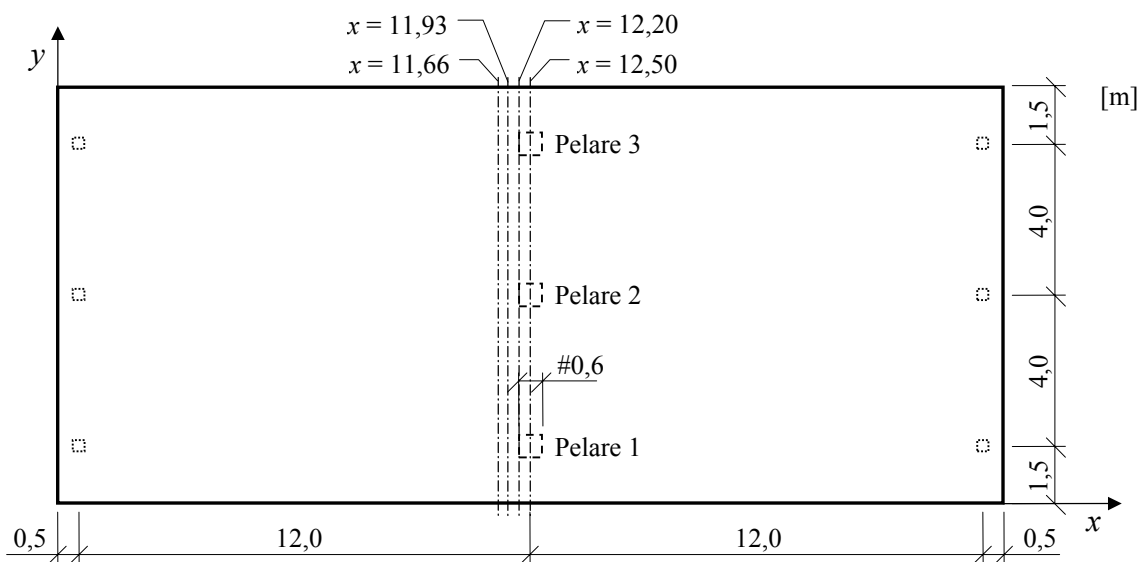
Detta gäller även i det fall där en tredimensionell struktur analyseras som en tredimensionell ram och där plattan delas in i längsgående och tvärgående balkar. Graden av omfördelning styrs av hur tätt användaren väljer att dela in plattan i olika balkar. Ju tätare indelning desto mer går resultaten mot det fall där plattan analyseras

med hjälp av platt- eller skalelement. För snedvinkliga plattor blir dock resultatet *sämre* med avseende på moment vid tätare indelning över en viss nivå. Det måste dock påpekas att en 3D skalmodell (och plattmodell) också är en förenkling av verkligheten utifrån en matematisk modell eller teori.

I kapitel 4.1 redovisas en linjär FE-analys av en plattbro upplagd på lager och pelare. I kapitel 4.2 ges förslag på hur generella FE-analyser bör redovisas gentemot Vägverket och Banverket.

#### 4.1 Linjär FE-analys av plattbro i armerad betong

Låt oss nu studera en verklig konstruktion, en plattbro i armerad betong enligt Figur 4.1. Plattan är upplagd på rörliga lager i båda ändarna och sammangjuten med pelarna i stödmitt. Pelarnas antas kvadratiska  $0,6 \times 0,6$  m och längden uppgår till 5,0 m. Plattans tjocklek antas uppgå till 0,6 m, vilket ger ett förhållande mellan höjd och spännvidd på 1:20. Elasticitetsmodulen och tvärkontraktionstalet väljs till 30,0 GPa respektive 0,2.



Figur 4.1 Geometri plattbro.

Plattbron modelleras på tre olika sätt:

1. 3D skalmodell
2. 3D volymmodell
3. 2D rammodell

3D skalmodellen är uppbyggd med linjära skalelement (QTS4, fyra noder) enligt Reissner-Mindlins platteori och balkelement, som tar hänsyn till skjuvdeformationerna. Elementnätet utgörs av nät med elementstorleken  $0,25 \times 0,25$  m i närheten av mittstöd. Pelarna modelleras med balkelement (BMS3, två noder). Analysen utförs med FE-programmet LUSAS [6].

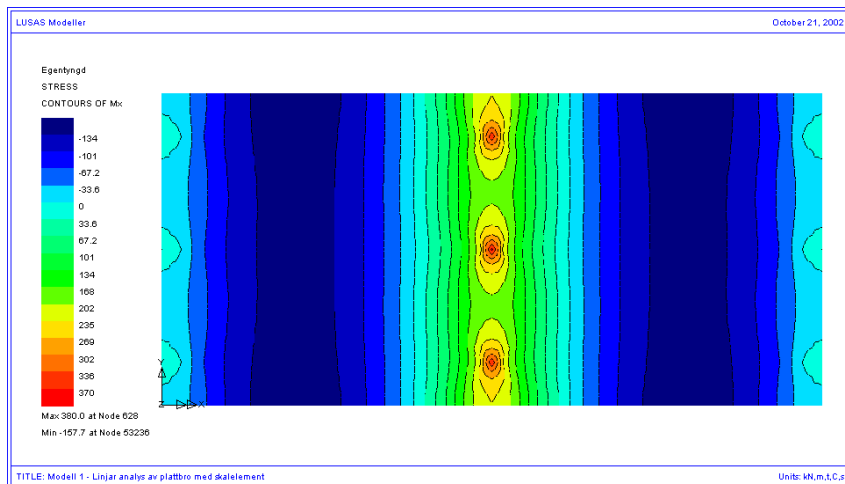
3D volymmodellen är uppbyggd med linjära volymentelement (HX8M, åtta noder). Plattan modelleras med två element på höjden. För att få den korrekta elasticitetsteoretiska fördelningen av skjuvspänningarna över hela tvärsnittet krävs det dock omkring åtta element på höjden. Skjuvspänningsfördelningen över tvärsnittet är dock inte av intresse här. Typisk elementstorlek uppgår således till  $0,3 \times 0,3 \times 0,3$  m i närheten av mittstöd. Pelarna modelleras med  $4 \times 12$  element. Analysen utförs med FE-programmet LUSAS [6].

I 2D rammodellen modelleras en strimla med en bredd på en meter av plattan med balkelement. Endast ett element per fack behövs, när plattan har samma tvärsnittshöjd över hela längden. Pelarnas styvhet beräknas som ett medelvärde för hela plattans bredd. Analysen utförs med ramprogrammet STRIP STEP 2 [20].

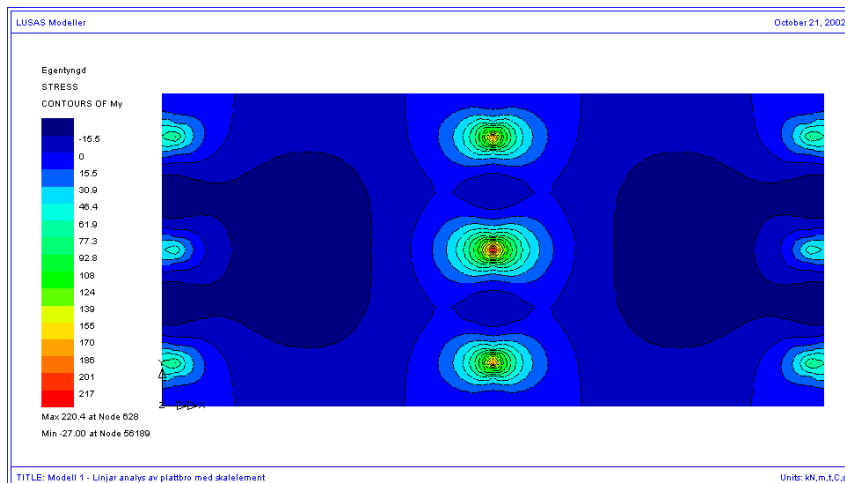
Av lasterna enligt Bro 2002 [1], kapitel 21, beaktas egentyngd och ekvivalentlast 1. Dessa utgör tillsammans upp till 90 % av dimensionerande lasteffekt i plattan, för den här typen av konstruktion. Egentyngden antas uppgå till  $25 \text{ kN/m}^3$ . Axellasterna placeras på det ställe som ger störst stödmoment i längdled över pelare 1 och 2. I 2D rammodellen beaktas lastfältet med tyngsta fordonet. Axellasterna fördelas därefter på en bredd av 3,0 m enligt praxis.

På sidorna 28-29 redovisas konturutskrifter för modell 1 – 3D skalmodell – med moment för lastfallen egentyngd och trafiklast avsedd att ge störst moment i två punkter över pelare 1 och 2. På sidan 30 redovisas maximalt böjmoment  $m_x$  i lastkombination IV:A (brottgränstillstånd) tillsammans med tillhörande moment  $m_y$  och  $m_{xy}$ . Lastkombination V:B motsvaras i detta fall av lastfallet egentyngd.

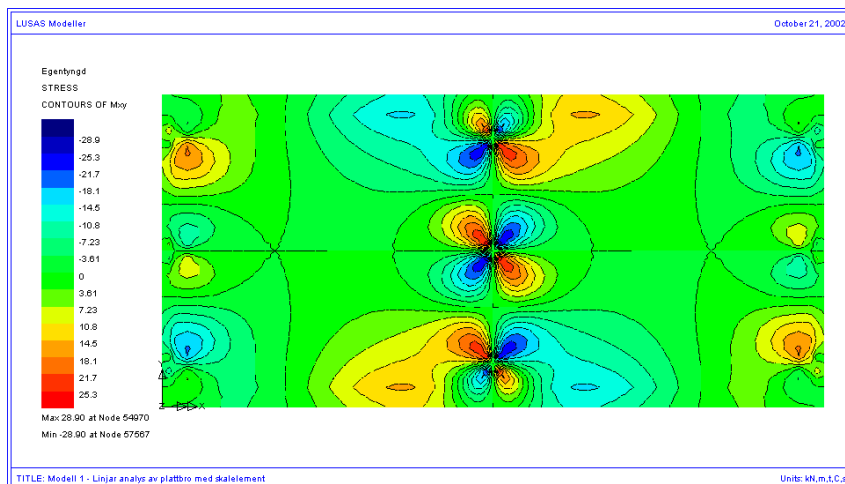
Snittkrafter och moment i elementen följer ett lokalt koordinatsystem inom elementet. Här sammanfaller det lokala koordinatsystemets riktningar med det globala. Moment  $m_x$  (kNm/m) avser moment i lokal x-riktning, moment  $m_y$  (kNm/m) avser moment i lokal y-riktning och vridmoment  $m_{xy}$  (kNm/m) avser vridande moment i ett lokalt xy-plan. Tvärkraft  $s_x$  (kN/m) avser tvärkraft i ett lokalt xz-plan och tvärkraft  $s_y$  (kN/m) avser tvärkraft i ett lokalt yz-plan. Observera att *positivt moment* definieras som *dragen översida* i LUSAS. Positiv tvärkraft är också definierad tvärtom mot vad som är brukligt.



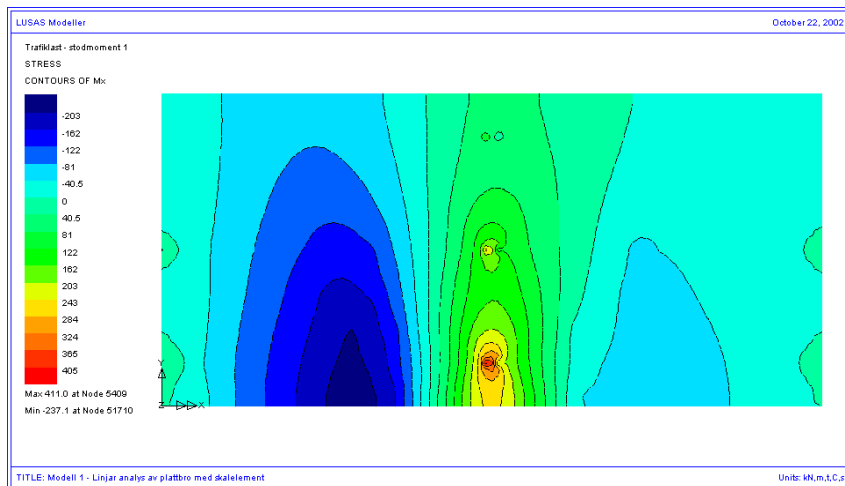
Figur 4.2 Böjmoment  $m_x$  för lastfallet egentyngd.



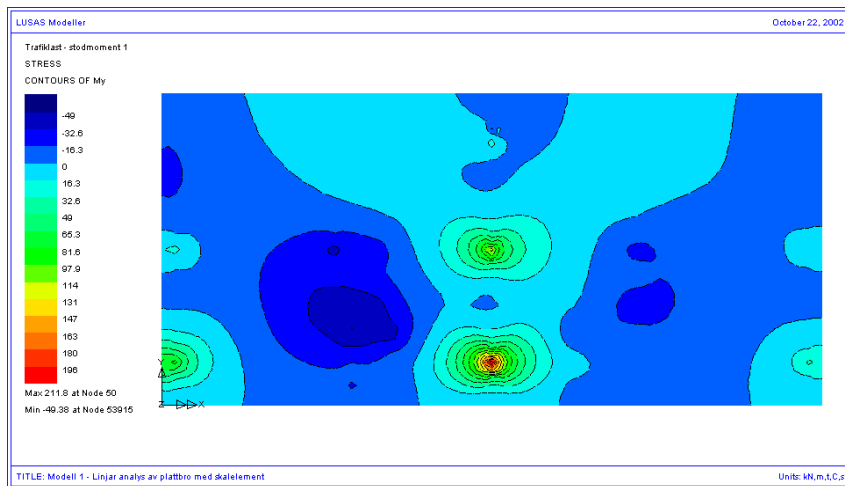
Figur 4.3 Böjmoment  $m_y$  för lastfallet egentyngd.



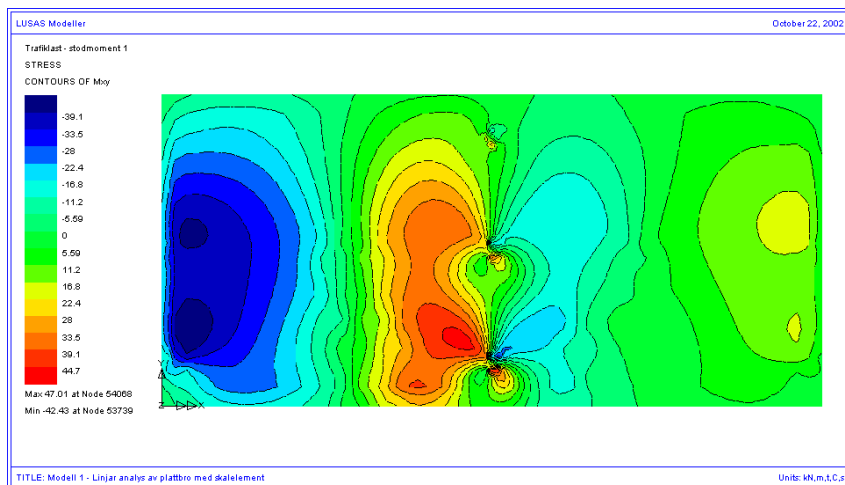
Figur 4.4 Vridmoment  $m_{xy}$  för lastfallet egentyngd.



Figur 4.5 Böjmoment  $m_x$  för lastfallet trafiklast – stödmoment 1.

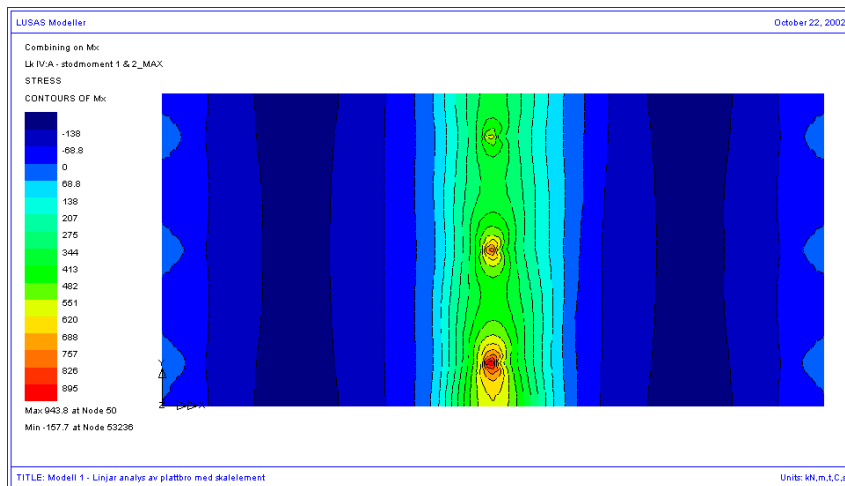


Figur 4.6 Böjmoment  $m_y$  för lastfallet trafiklast – stödmoment 1.

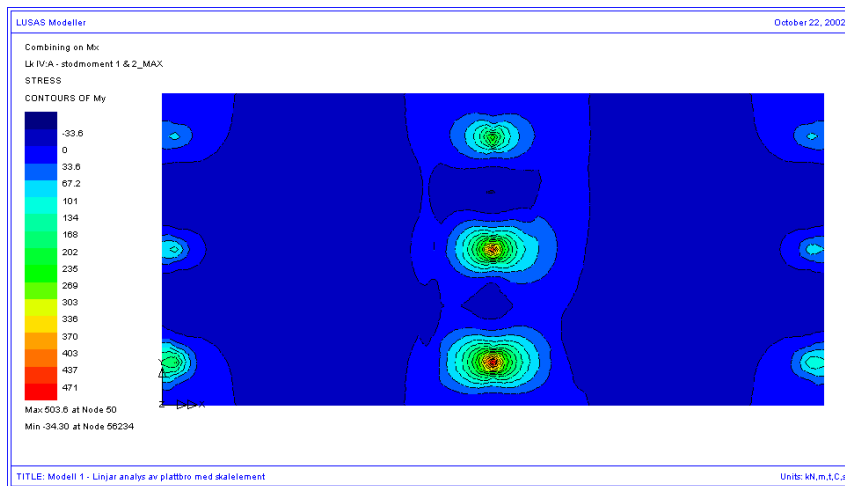


Figur 4.7 Vridmoment  $m_{xy}$  för lastfallet trafiklast – stödmoment 1.

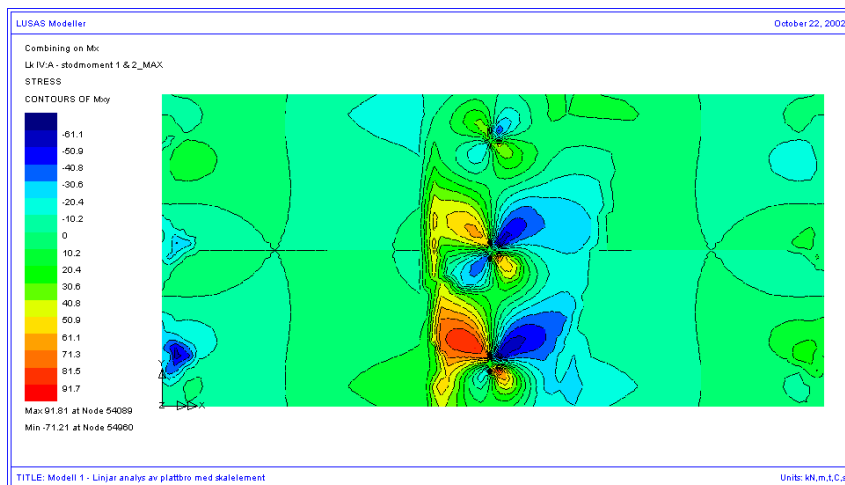




Figur 4.8 Böjmoment  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2.

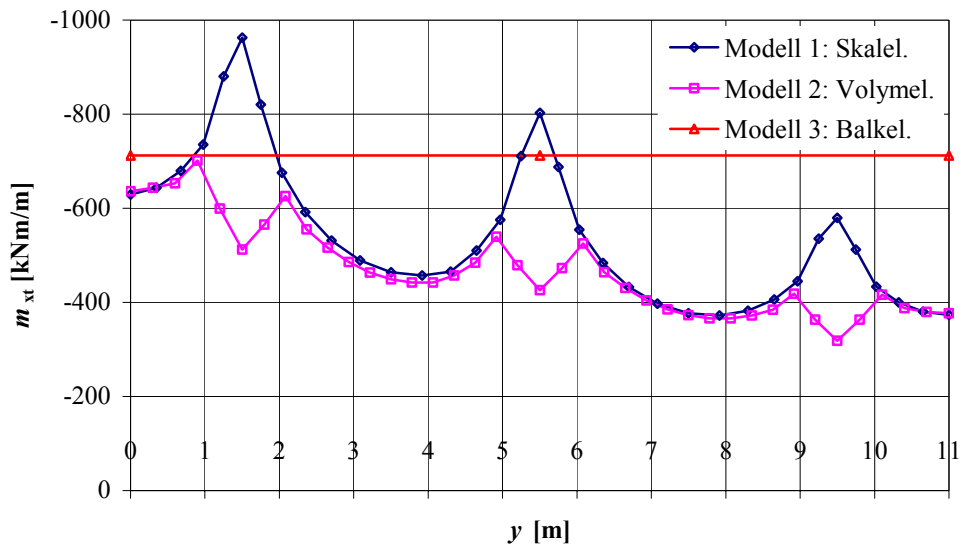


Figur 4.9 Böjmoment  $m_y$  tillh.  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2.

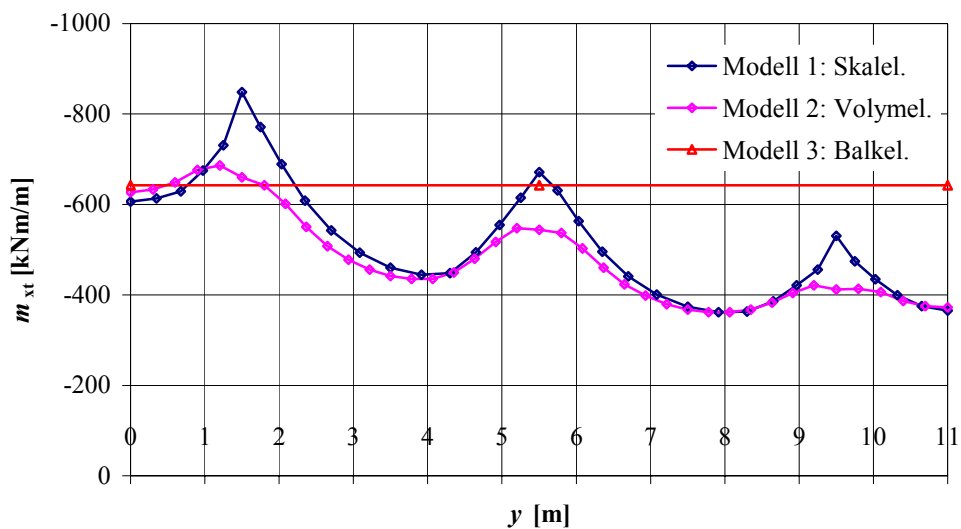


Figur 4.10 Vridmoment  $m_{xy}$  tillh.  $m_{x,max}$  i lastkomb. IV:A – stödmoment 1 och 2.

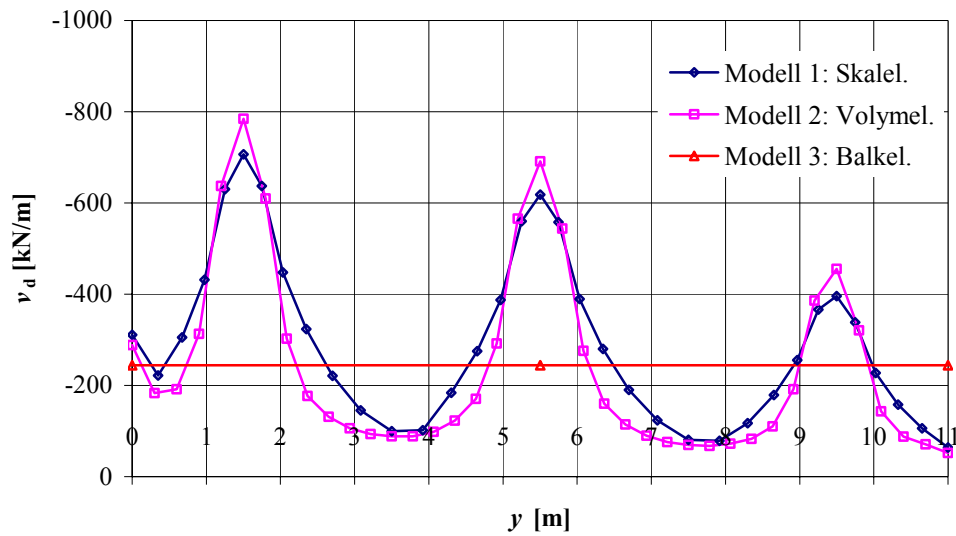
I Figur 4.11-4.14 redovisas moment- och tvärkraftsdiagram längs de fyra snitt i brottgränstillstånd (lastkombination IV:A), som definierats i Figur 4.1. Dimensionerande moment för armering med beaktande av beräknade vridmoment enligt BBK 94, kapitel 6.5.3.2, med  $\mu = 1$ , redovisas längs y-axeln för  $x = 12,50$  m och  $x = 12,20$  m (stödkant pelare). Tvärkraftsfördelningen redovisas för  $x = 12,20 - d/2 = 11,93$  m och  $x = 12,20 - d = 11,66$  m ( $d$ , egentligen  $0,9d$  utanför kritiskt snitt för moment.). Tvärkraft i båda riktningarna beaktas enligt kapitel 3.4.2. Observera att tecknet för moment och tvärkraft från analyser med LUSAS har växlat i diagrammen jämfört med konturutskrifterna i färg. Positivt moment innebär här dragen undersida.



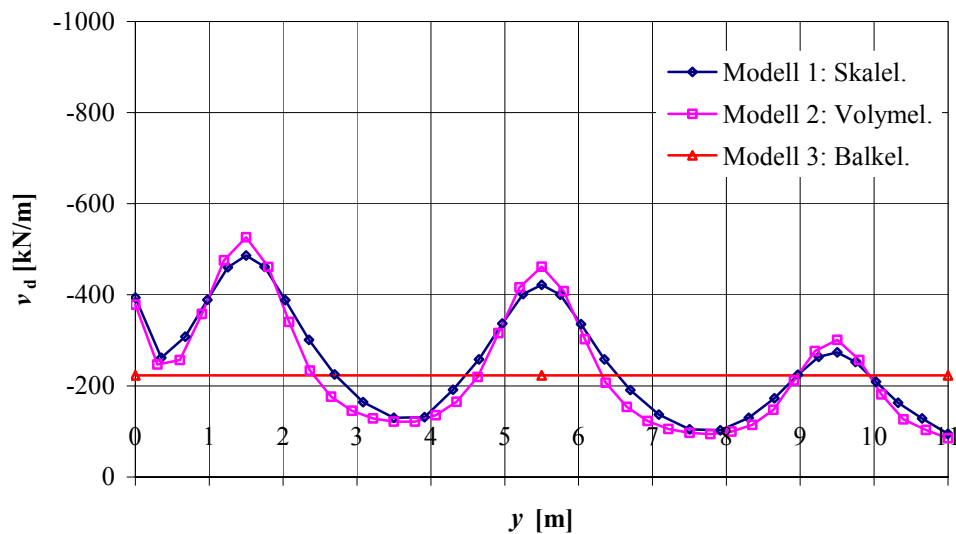
Figur 4.11 Böjmoment  $m_{xt} = m_x - \mu \cdot |m_{xy}|$  för  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2 – längs y-axeln för  $x = 12,50$  m.



Figur 4.12 Böjmoment  $m_{xt} = m_x - \mu \cdot |m_{xy}|$  för  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2 – längs y-axeln för  $x = 12,20$  m.



Figur 4.13 Tvärkraft  $v_d$  för  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2 – längs  $y$ -axeln för  $x = 11,93$  m.



Figur 4.14 Tvärkraft  $v_d$  för  $m_{x,max}$  i lastkombination IV:A – stödmoment 1 och 2 – längs  $y$ -axeln för  $x = 11,66$  m.

Av Figur 4.11-4.14 framgår att det som väntat föreligger små skillnader i resultat mellan modell 1 (3D skalmodell) och modell 2 (3D volymmodell). Volymmodellen ger dock något lägre moment precis över stöd på grund av att stödets utbredning är med i den modellen. Skalmodellen ger dock ett resultat på säker sida. Resultaten från volymmodellen stöder således principen om att dimensionerande snitt för moment ligger i stödkant pelare ( $x = 12,20$  m). Vid den fria kanten ( $y = 0,0$  m) sker en kraftig ökning av tvärkraft, se vidare t.ex. Kettil [4]. I det fortsatta resonemanget utnyttjas resultaten från skalmodellen.

Jämfört med modell 3 (2D rammodell) föreligger stora skillnader med avseende på snittkrafter och moment, eftersom dessa antas vara jämt fördelade över hela bredden. Över stöd kan detta förfarande bli på osäker sida, trots att de tyngsta axellasterna bara fördelats på filbredden 3,0 m. Detta gäller särskilt tvärkraftsfördelningen, se Figur 4.13 och Figur 4.14. Observera att redovisad tvärkraft avser tillhörande tvärkraft för dimensionerande moment över pelare 1 och 2.

I kapitel 3.4 redovisades fördelningsbredder för moment och tvärkraft. Om vi applicerar de redovisade principerna för fördelning av moment och tvärkraft, erhåller vi total fördelningsbredd i tvärled för stödmoment i längsled i brottgränstillstånd som

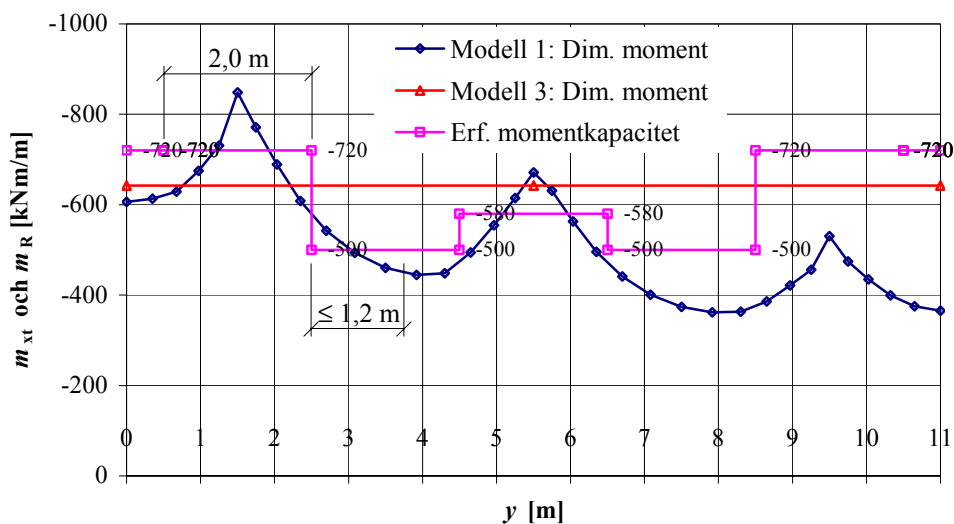
$$b_{\text{ef,tot}} = 2 \cdot \min(3h; l/10) = 2 \cdot \min(3 \cdot 0,6; 12/10) = 2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\text{Välj } b_{\text{ef,tot}} = 2,0 \text{ m} = 2 \cdot 1,67h$$

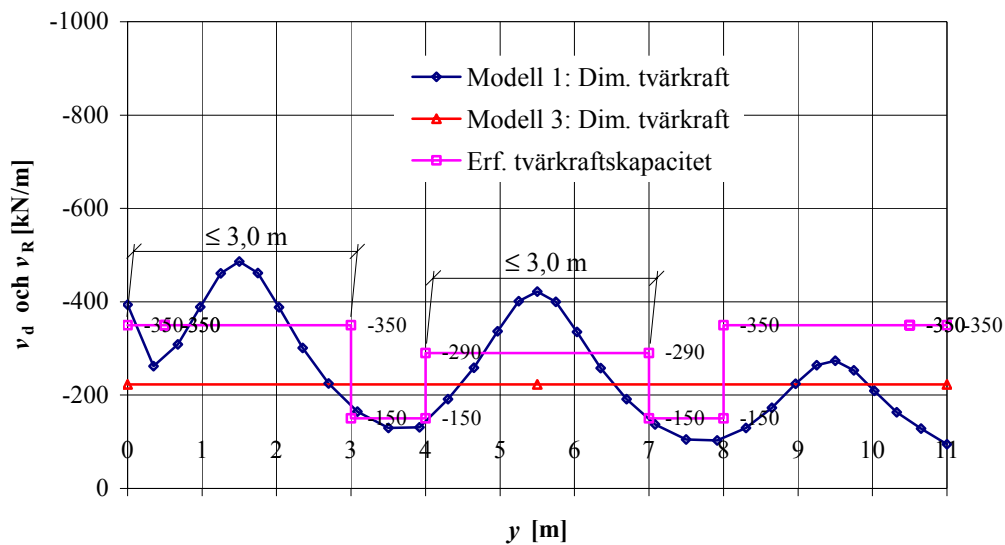
och för tvärkraft i brottgränstillstånd (lastkombination IV:A) som

$$b_{\text{ef}} = 5h = 5 \cdot 0,6 = 3,0 \text{ m}$$

Kritiskt snitt för tvärkraft antas ligga på avståndet  $d$  (egentligen  $0,9d$  alternativt  $0,5d$ ) utanför kritiskt snitt för moment. I Figur 4.15 och Figur 4.16 redovisas erforderlig momentkapacitet och tvärkraftskapacitet med utnyttjande av ovanstående fördelningsbredder i brottgränstillstånd. Av figurerna framgår att 2D rammodellen ger ett för *litet* dimensionerande moment över kantpelarna. För de inre delarna av plattan ger däremot 2D rammodellen ett för *stort* dimensionerande moment. Möjligheter finns således till besparingar i de inre delarna av plattan.



Figur 4.15 Erforderlig momentkapacitet  $m$ .h.t. fördelning av moment i lastkombination IV:A längs  $y$ -axeln för  $x = 12,20 \text{ m}$ .

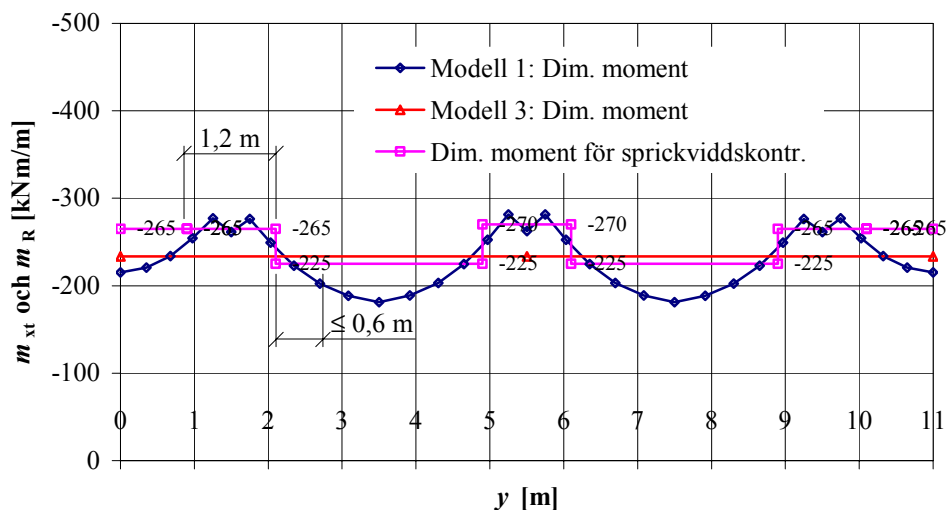


Figur 4.16 Erforderlig tvärkraftskapacitet m.h.t. fördelning av tvärkraft i lastkombination IV:A längs y-axeln för  $x = 11,66$  m.

I bruksgränstillstånd (lastkombination V:B) utnyttjas här en fördelningsbredd i tvärled uppgående till halva fördelningsbredden i brottgränstillstånd, d.v.s.

$$b_{\text{ef,tot}} = 2 \cdot \min(3h; l/10)/2 = 2 \cdot 1,2/2 = 1,2 \text{ m} = 2 \cdot 1,0h$$

I Figur 4.17 redovisas dimensionerande moment för kontroll av sprickbredd med utnyttjande av ovanstående fördelningsbredder i tvärled i bruksgränstillstånd.



Figur 4.17 Dimensionerande moment för sprickviddskontroll m.h.t. fördelning av moment i lastkombination V:B längs y-axeln för  $x = 12,20$  m.

Av Figur 4.17 framgår att 2D rammodellen i detta avseende ger ett för *litet* dimensionerande moment över alla pelarna. För områdena mellan pelarna ger däremot 2D rammodellen ett för *stort* dimensionerande moment.

I exemplet ovan har vi bara studerat skillnader för snittkrafter och moment i bronslängdriktning. En motsvarande studie i tvärled visar på liknande effekter. 2D rammodellen i längdled kompletteras då med en analys i tvärled av en balk upplagd på tre stöd (pelare). Reaktionerna från analysen i längdled antas därefter belasta balken. Jämt utbredda laster som t.ex. egentyngd antas vara fördelad över hela balken. Trafiklast antas vara en utbredd last med filbredden 3,0 m. Olika tyngder i olika lastfält beaktas. Svårigheten eller osäkerheten i denna starkt förenklade modell ligger i att bestämma plattans medverkande bredd i tvärled. Det val som konstruktören gör av medverkande bredd styr i vilken grad som resultatet avviker från den linjärelastiska lösningen. För att få en enklare beräkningsmodell kan plattan förses med vot intill mittstödet. I tvärled betraktar man då denna del som en tvärbalk och eventuellt kan en del av plattan tas med som fläns.

Det finns tillfällen när en 2D rammodell är ännu mindre korrekt än i exemplet ovan. För en snedvinklig bro skall resultaten från en 2D ramanalys korrigeras med hänsyn till snedvinkligheten. Detta utförs med hjälp av handboksmetoder genom att justera spännvidder och fördela om moment mot trubbigt hörn. Dessa omfördelningar efterliknar verkligheten endast på ett grovt sätt.

## 4.2 Redovisning av FE-analyser

Vid projektering och konstruktion av byggnadsverk gentemot Vägverk och Banverk styrs redovisningen av konstruktionsberäkningar med tillhörande datorberäkningar av kraven i Bro 2002 [1].

Kraven i Bro 2002, kapitel 14.53 och bilaga 1-2.55, är uppbyggda utifrån användande av enklare tvådimensionella ramprogram för strukturanalys. För ett tvådimensionellt ramprogram går det att i detalj föreskriva vad som skall redovisas från programmet. Mängden utdata är hanterbar även för mycket stora modeller. Vid övergång till tre dimensioner blir det med än gång mer komplicerat, om skalelement eller dylikt har använts. Stora mängder indata medför att det i praktiken blir omöjligt att skriva ut all indata och utdata som text. En FE-analys med t.ex. skalelement kan utan vidare generera tusentals med sidor, som inte är till större nytta för någon. Det inses att mer nyanserade krav och riktlinjer måste tas fram beträffande redovisning av analyser med generella FE-program.

Genom en kombination av beskrivning i ord och i bild kan man på ett tydligt och överskådligt sätt beskriva hur FE-modellen är uppbyggd. Med dagens moderna hjälpmedel såsom färgskrivare kan överskådliga färgutskriften produceras. En god redovisning av en FE-analys bör innehålla följande:

- Beskrivning av FE-program
- Beskrivning av beräkningsmodell
- Beskrivning av laster och lastkombinationer
- Utskrift av en av programmet genererad kommandofil eller programkod
- Presentation av resultat
- Verifiering av resultat
- Utvärdering och tolkning av resultat – fördelning av krafter och moment

Beskrivningen av FE-programmet bör innehålla programnamn, version, allmän beskrivning av programmet i enlighet med kraven i Bro 2002, kapitel 14.53. Dessutom kan uppgifter lämnas om eventuella referensprojekt och internationella användare av programmet vid introducering av för granskaren nya programvaror.

I beskrivningen av beräkningsmodellen medtas uppgifter om systemlinjer, geometri, materialvärden, typer av element och val av elementnät samt randvillkor. Val av förenklingar och antaganden skall motiveras. Speciellt viktigt är att beskriva hur verkliga randvillkor har tolkats och modellerats. Genom en kombination av beskrivning i ord och redovisning med hjälp av figurer skapas en tydlig redovisning, som är lätt att följa. Figurer i färg kan redovisa variationer av tvärsnittsjocklekar och excentriciteter i beräkningsmodellen. Koordinater för utvalda punkter i strukturen kan redovisas i en figur. En redovisning av en FE-analys behöver därför *inte* innehålla koordinater för varje *enskild nod*, nod- och elementnummer eller elementuppgifter för varje *enskilt element* i textform, om redovisningen utförs på ett i övrigt tydligt sätt.

Beskrivningen av laster bör innehålla vilka laster som beaktats och på vilket sätt de beaktats i modellen. I de fall där det inte är uppenbart att lasterna inte är relevanta för den analyserade typen av konstruktion motiveras varför lasterna inte tagits med. Beskrivningen i ord kan kompletteras med figurer, som visar vilka laster som applicerats på konstruktionen.

Många generella FE-program kan skriva ut en kommandofil, som i text beskriver hur modellen och övriga indata generats. Med denna fil går det att kontrollera att alla laster och lastkombinationer är medtagna. Vanligtvis kan inga resultat tas med i en sådan fil, eftersom det är en fil som anger givna indatakommandon.

Resultatet presenteras med fördel med hjälp av *konturutskrifter* i färg för olika snittkrafter och moment. Redovisningen bör omfatta de beaktade lastkombinationerna och i vissa fall även snittkrafter och moment för de dominerade lasterna. Konturutskrifterna förses med någon typ av unik signatur t.ex. datum eller filnamn, för att de lättare skall kunna identifieras vid inklistring i något ordbehandlingsprogram. Konturutskrifterna skall förses med någon form av nyckeltabell, där det går att läsa av vad respektive färg betyder. Med hjälp av dessa nyckeltabeller får en eventuell granskare lätt en överblick över snittkrafternas och momentens fördelning i strukturen. Redovisning av exakta siffervärden i tabellform eller diagramform skall *endast* ses som ett *komplement* till konturutskrifterna längs vissa kritiska snitt, eftersom siffervärdena endast kan anges i diskreta punkter. För en modell bestående av tusentals noder, så inses det lätt att utskrift i tabellform inte är praktiskt möjlig.

Resultatredovisningen bör även kompletteras med enklare jämviktskontroller för utvalda lastfall, där det kontrolleras att de resulterande reaktionerna motsvarar de applicerade lasterna. Detta är särskilt viktigt, när det inte är möjligt att på ett enkelt sätt redovisa i vilka positioner lasterna applicerats på strukturen som för t.ex. rörliga trafiklaster. Beroende på val av modellering så har dessa placerats i ett stort antal positioner längs strukturen och det är därför inte möjligt att i bild redovisa alla

positioner. Trafiklastplaceringar för vissa kritiska snitt bör dock redovisas grafiskt. Konstruktören bör därför komplettera resultatredovisningen med en kontroll, där det visas att erhållna snittkrafter och moment i kritiska snitt är rimliga.

Utvärderingen och tolkningen av resultatet och fördelning av snittkrafter och moment utförs som en egen del eller i samband med kontroll av tvärsnittskapaciteter.

Det är viktigt att ha i åtanke att även den bästa beräkningsmodell innebär en förenkling av verkligheten. Att prata om vad som är rätt eller vad som är det exakta svaret för en verklig konstruktion, såsom en bro, är därför inte meningsfullt, vilket också har belysts i exemplen i kapitel 2.3 och 4.1. Två oberoende analyser som kommer till samstämmiga resultat med en avvikelse på 10-20 % får anses vara bra. Syftet med redovisningen måste därför vara att på ett övertygande sätt visa att modelleringen är väl utförd och att modell och laster är valda så att slutprodukten får tillräcklig bärförmåga, stadga och beständighet. Olinjära analyser kan härvid ge ett bättre underlag, för att bedöma den verkliga responsen.

## 5 Diskussion och slutsatser

### 5.1 Sammanfattning

I den här rapporten beskrivs att stora skillnader i resultat kan uppkomma beroende på val av beräkningsmodell för strukturanalys av brokonstruktioner. Vid användning av FEM ger olika val av finita elementnät, sätt att modellera hjullaster och upplag stora skillnader i beräkningsresultat. Enligt platteorin utgör t.ex. en punkt under en koncentrerad last en singular punkt i vilken värdet på tvärkraften går mot oändligheten. Beroende på val av elementnät och placering av punktlast erhålls därför olika resultat från en FE-analys. Val av elementnät etc. har dock mindre betydelse, om man fördelar ut snittkrafter och moment från en linjärelastisk FE-analys, så att de bättre avspeglar konstruktionens verkliga beteende.

Betongplattor armerade i två riktningar uppvisar vanligen stor förmåga till plastiska omlagringar i ett brottgränstillstånd. Konstruktören har därför stor möjlighet att fritt *välja en lämplig armeringsfördelning* så länge den uppfyller jämviktsvillkoren. Stor omsorg måste emellertid läggas vid andra brottmoder såsom genomstansning. Även i bruksgränstillstånd sker kraft- och momentomlagringar på grund av att betongen spricker. I bruksgränstillstånd kan dock *inte* graden av omlagring *väljas*, eftersom omlagringen helt bestäms av aktuella styvhetsförhållanden. För att bedöma konstruktionens *fullständiga respons* avseende påkänningar, sprickbredder och deformationer i bruksgränstillstånd erfordras därför en *olinjär analys*, som kan utföras först när konstruktionens utformning är fullt känd.

Förslag på fördelningsbredder i *tvärled* i förhållande till studerad lastbärningsriktning av de snittkrafter och moment, som erhålls från en linjärelastisk 3D FE-analys har presenterats utifrån de rekommendationer som återfinns i allmänt använda handböcker. Ingen omfördelning mellan stöd och fält i längdled har utnyttjats.



Fördelningsbredden för moment i brottgränstillstånd vid en kantstrimla kan väljas till det minsta av  $3h$  eller  $l/10$  och över koncentrerat upplag till två gånger detta värde. Några generella rekommendationer avseende av fördelningsbredder i bruksgränstillstånd är svåra att ge, eftersom graden av omlagring inte kan väljas. I de studerade handböckerna ges dock rekommendationer av fördelningsbredder generellt, d.v.s. ingen distinktion görs mellan brott- och bruksgränstillstånd. Ovanstående fördelningsbredder i tvärled torde därför kunna användas med viss försiktighet även i bruksgränstillstånd till dess att nya undersökningar visar något annat.

För tvärkraft kan fördelningsbredden i brottgränstillstånd antas uppgå till högst  $5h$ . Vid t.ex. kantupplag reduceras denna fördelningsbredd till  $2,5h + a$ , dock högst  $5h$ , där  $a$  är avstånd från kant till kritisk punkt. Även när det gäller tvärkraft så styrs omlagringen för konstruktionsdelar utan tvärkraftsarmering av sprickbildningen, vilket ej beaktas i den linjärelastiska analysen.

Går man ett steg längre och även utnyttjar omfördelningar mellan stöd och fält så innebär det att brottgränstillstånd får vara ett tillstånd på gränsen till brott för konstruktionen i den ursprungliga innebörden av begreppet. Kraftiga omfördelningar i brottgränstillstånd skulle därmed kunna tillåtas, om de kompletteras med kontroller av deformationsförmågan och med kontroller i bruksgränstillstånd. Detta skulle dock kräva en ändring av Bro 2002 [1], eftersom gränslastteori endast tillåts för olyckslaster. I praktiken tillåts redan kraftiga omfördelningar i tvärled, eftersom förenklade beräkningsmodeller och handboksmetoder på ett approximativt sätt beaktar denna effekt. BBK 94 [9], kapitel 6.5.5 ger t.ex. en fördelaktig fördelningsbredd för tvärkraft jämfört med linjärelastiska FE-analyser. Detta gäller även om den gynnsamma inverkan av last nära upplag beaktas.

Den växande användningen av generella FE-program i samband med strukturanalys gentemot Vägverket och Banverket har visat på ett stort behov av mer nyanserade krav än i Bro 2002, kapitel 14.53 och bilaga 1-2.55. Genom en kombination av beskrivning i ord och i bild kan man på ett tydligt och överskådligt sätt beskriva hur FE-modellen är uppbyggd. Med dagens moderna hjälpmedel såsom färgskrivare kan överskådliga färgutskriftar produceras, där man snabbt får en överblick över resultatet. Redovisning av exakta siffervärden i tabellform eller diagramform skall *endast* ses som ett *komplement* till konturutskrifterna längs vissa kritiska snitt. Detta leder till förändrade krav på mottagningskontrollen hos Vägverket och Banverket. För en konstruktion med krav på detaljgranskning (mottagningskontroll alternativ C) innebär det med stor sannolikhet att granskaren måste göra en oberoende strukturanalys. På samma sätt som tidigare måste det behöriga konsultföretaget ha kompetens att upprätta konstruktionsberäkningar för aktuellt objekt. En konstruktionsberäkning med användande av FEM innebär ingen principiell skillnad i krav på företaget.

Som ett led i en kompetensutveckling av branschen bör ett årligt återkommande seminarium hållas, där de olika konsultföretagen utbyter erfarenheter beträffande FE-analyser och integration mellan FE-program och CAD-program. Förhoppningen är att dessa seminarier kan hållas i en öppen anda och att utvecklingen förs framåt, vilket är till gagn för branschen som helhet.

## 5.2 Förslag till framtida forskning

”Kokboksmetoder” i handböcker lämpar sig inte för moderna FE-analyser. Normer och handböcker saknar i stor utsträckning rekommendationer för utvärdering av linjärelastiska lösningar. Förslag till framtida forskning redovisas nedan.

Arbetet avseende framtagande av rekommendationer för utvärdering av linjärelastiska FE-analyser utförs lämpligen som examensarbeten i kombination med doktorandstudier. Utveckling av formler för tvärkraftsdimensionering som bättre avspeglar konstruktionens verkningssätt och kan anpassas till moderna beräkningsmetoder utförs lämpligen i ett projekt med personer som tillsammans har praktisk, teoretisk och experimentell kunskap.

- Framtagande av rekommendationer för utvärdering av linjärelastiska FE-analyser utifrån olinjära FE-analyser av betongkonstruktioner. För vidare beskrivning av innehåll, se Plos och Gylltoft [19], kapitel 5.1. Utredningen bör omfatta både brottgränstillstånd och bruksgränstillstånd.
- Önskvärt är att göra det möjligt att programmera datorn till att utföra en automatisk kontroll av kapaciteten i alla punkter utifrån resultatet från en FE-analys. Formler för tvärkraftsdimensionering behöver tas fram som bättre avspeglar konstruktionens verkningssätt och kan anpassas till moderna beräkningsmetoder

I Bro 2002 [1] finns det noggrant specificerade krav på att sprickrisken skall beräknas under betongens härdningsförlopp. Däremot finns i dagens läge inga rekommendationer hur inbyggda tvångseffekter från betongens härdning påverkar den slutliga konstruktionen och hur detta eventuellt kan beaktas i strukturanalysen. Även andra tvångseffekter såsom krympning och inverkan av temperaturvariationer under bruksskedet beaktas mycket förenklat i den globala strukturanalysen. Slutkrympningen antas ofta uppgå till samma värde för alla konstruktionsdelar och ingen hänsyn tas till att krympförloppet är olika för konstruktionsdelar med olika tjocklek. För vissa konstruktionstyper kan krympningen ha en avgörande inverkan på uppkomsten av sprickor i konstruktionen. Detta gäller ofta i brons tvärled i förhållande till studerad lastbärningsriktning. Sprickviddsformlerna i BBK 94 [9], kapitel 4.5.5, gäller huvudsakligen för effekter orsakade av yttre laster och inte av tvångslaster. Förslaget nedan till framtida forskning utförs lämpligen i samarbete med Vägverket.

- Framtagande av rekommendationer för beaktande av tvångseffekter från härdningsförloppet, krympning och temperaturvariationer i bruksskedet. Ofta utförs noggrann analys av sprickrisken under härdningsförloppet, men ingen koppling finns till själva strukturanalysen. Hur kan resultatet från sprickriskanalysen föras över till strukturanalysen och hur noggrant behöver olika krympförlopp beaktas? Behöver nuvarande sprickviddsformler i BBK 94 revideras, om tvångseffekter beaktas på ett mera noggrant sätt?

## 6 Referenser

- [1] Vägverket: *Vägverkets allmänna tekniska beskrivning för nybyggande och förbättring av broar, Bro 2002*, Avdelningen för bro och tunnel, publikation 2002:47, Borlänge 2002.
- [2] Samuelsson A. & Wiberg N.-E.: *The Finite Element Method – Basics*, Studentlitteratur, Lund 1998.
- [3] Stein, E., Rytter, M. & Ohnimus, S.: Adaptive Finite Element Analysis and Modelling of Solids and Structures – Findings, Problems and Trends, sent for possible publication in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [4] Kettil, P.: *Computational Engineering – Development and Implementation of Computational Methods for Structural Analysis and Design*, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Doctoral Thesis, Göteborg 2001.
- [5] Kettil, P.: *Fortranprogram för analys av Reissner-Mindlin plattor med fourierserier*, Göteborg 1999.
- [6] LUSAS: *LUSAS version 13.4*, [www.lusas.com](http://www.lusas.com), Kingston upon Thames, Storbritannien 2002.
- [7] CEN: *Eurocode 2: Design of Concrete Structures – General Rules and Rules for Buildings*, prEN 1992-1, Brussels 2001.
- [8] AB Svensk Byggtjänst och Cementa: *Betonghandbok – Konstruktion, utgåva 2*. AB Svensk Byggtjänst, Solna 1990.
- [9] Boverket: *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, Band 1 – Konstruktion, BBK 94*, AB Svensk Byggtjänst, Karlskrona 1994.
- [10] Hillerborg, A.: *Strip Method Design Handbook*, E. & F. N. Spon, London 1996.
- [11] Enochsson, O. & Dufvenberg, P.: *Concrete Slabs Designed with Finite Element Methods – Modelling Parameters, Crack Analysis and Reinforcement Design*, Division of Structural Engineering, Department of Civil and Mining Engineering, Luleå University of Technology, Master Thesis 2001:328, Luleå 2001.
- [12] Engström, B.: *Beräkning av betong- och murverkskonstruktioner*, Institutionen för konstruktionsteknik, Chalmers tekniska högskola, kompendium 94:2, Göteborg 1994.

- [13] Marti, P.: Some Remarks on Punching, International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs, Institutionen för byggnadskonstruktion, Kungliga tekniska högskolan, *Bulletin 57*, Stockholm 2000, pp. 27-37.
- [14] Bentz, E. C.: *Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members*, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Doctoral Thesis, Toronto 2000.
- [15] Collins, M. P. & Vecchio, F. J.: The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear, *ACI Structural Journal*, Vol. 83, No. 2, 1986, pp. 219-231.
- [16] Schlaich, J. & Schäfer, K.: *Konstruieren im Stahlbetonbau*, Betonkalender 1998, Teil II, Ernst & Sohn, Berlin 1998.
- [17] AB Byggmästarens Förlag: *Handboken Bygg – Konstruktionsteknik*, huvuddel 3, AB Byggmästarens Förlag, Stockholm 1969.
- [18] Vägverket: *Allmän teknisk beskrivning för klassningsberäkning av vägbroar*, Avdelningen för bro och tunnel, publikation 1998:78, Borlänge 1998.
- [19] Plos, M. & Gylltoft, K.: *Bärighetsutredningar av broar i framtiden – Nyanserade beräkningsmetoder såsom finit elementmetod*, Institutionen för konstruktionsteknik, Chalmers tekniska högskola, rapport nr. 02:6, Göteborg 2002.
- [20] Ingenjörfirma Åke Bengtsson AB: *STRIP STEP 2 version PC-04*, Stockholm 2001.